

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Нелокальные и статистические эффекты в волновых и диффузионных процессах

1.1 Инверсии магнитного поля в одной маломодовой модели $\alpha\Omega$ -динамо

1.1.1 Введение в подраздел

Для систем космического динамо (планет, звезд, галактик) обычно рассматривают три механизма $\alpha\Omega$, α^2 и $\alpha^2\Omega$, из которых третий является наиболее общим [1, 2]. Первые два используются когда эффективности α - и Ω -генераторов резко отличаются. В частности, при сильном дифференциальном вращении генерацию магнитного поля описывают с помощью $\alpha\Omega$ -динамо.

Известным свойством динамо систем является наличие инверсий – резкой смены полярности магнитного поля, без существенной перестройки движения проводящей среды. Реальные космические динамо-системы демонстрируют как регулярный характер инверсий, например солнечный цикл, так и крайне хаотичный – Земля. Протяженность различных интервалов времени между инверсиями (интервалов полярности) у геомагнитного поля отличается на несколько порядков [3].

Моделирование инверсий является интенсивно разрабатываемым разделом теории динамо. Их изучение проводится как с использованием прямого численного моделирования, так и на основе упрощенных моделей. Прямое численное моделирование магнитогидродинамических уравнений позволяет воспроизвести многочисленные режимы инверсий, но не отвечает на вопрос об их причине. Кроме этого, полные уравнения содержат очень много параметров, оценки которых часто расходятся на много порядков, либо вообще не существуют. Поэтому с помощью простых динамических систем малой размерности пытаются объяснить физическую причину, признаки, важнейшие свойства этого явления, например [4, 5, 6, 7, 8].

В настоящей работе мы моделируем инверсии поля в одной простой модели $\alpha\Omega$ -динамо. Эта трехмодовая модель с флуктуирующими интенсивностями α - и Ω -генераторов. Источник этих флуктуаций можно осмыслить как результат синхронизации высших отброшенных мод скорости и магнитного поля. Такое спонтанное формирование и разрушение когерентных структур хорошо известно в теории турбулентности [9].

1.1.2 Уравнения модели

Рассмотрим сферическую оболочку вязкой проводящей жидкости во вращающейся системе координат. Начало координат совпадает с центром оболочки, а Oz – ось вращения. Будем использовать также сферические координаты (r, θ, φ) . На внутренней r_1 и внешней r_2 границах оболочки скорость нулевая. Такая постановка задачи граничных условий характерна для гео-

динамо и задается для определенности. Для магнитного поля ставятся вакуумные условия на внешней границе.

Физические параметры оболочки считаем неизменными. Полагаем также, что турбулентность в ядре изотропная, а α -эффект антисимметричен относительно экватора. Поэтому принимаем скалярную параметризацию α -эффекта в следующем виде $\alpha(r, \theta) = \alpha_0 a(r) \cos \theta$, где $\max |a(r)| \sim 1$, а коэффициент $\alpha_0 > 0$ определяет интенсивность α -эффекта. Сейчас мы будем рассматривать задачу кинематического динамо, но далее введем алгебраическое подавление α -эффекта крупномасштабным магнитным полем.

Обезразмеренные уравнения динамо можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= R_m \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + R_\alpha \nabla \times (a(r) \cos \theta \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где R_m – магнитное число Рейнольдса, а R_α – амплитуда α -эффекта. Поле скорости \mathbf{v} считается заданным постоянным. Такой вид безразмерных уравнений соответствует выбору радиуса r_2 в качестве пространственного масштаба L , времени магнитной диффузии L^2/ν_m в качестве временного масштаба (ν_m – коэффициент магнитной диффузии) и некоторых характерных единиц скорости U и магнитной индукции B_0 .

В простых вариантах $\alpha\Omega$ -динамо считается, что движение среды – дифференциальное вращение, т. е. поле \mathbf{v} – тороидальное. Однако известно, что в реальности это движение является конвекцией и \mathbf{v} включает полоидальную компоненту. Более того, сферически однородный тепловой поток возбуждает при конвекции лишь полоидальные компоненты, а тороидальные возникают лишь в результате кориолисова сноса.

Поэтому мы задаем поле скорости как линейную комбинацию нескольких мод свободной диссипации жидкости в оболочке. Все такие моды имеют вид $\mathbf{v}_{k,n,m}^T = \nabla \times [R_{kn}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}]$ (тороидальные) и $\mathbf{v}_{k,n,m}^P = \nabla \times \nabla \times [R_{kn}^P(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}]$ (полоидальные), где индекс k определяет количество слоев конвекции в радиальном направлении. В аксиально симметричном случае $m = 0$. Параметры функции $R_{kn}^T(r)$ и $R_{kn}^P(r)$ зависят от величины аспектного отношения r_1/r_2 . Мы использовали в расчетах земное значение 0.35.

Дифференциальному вращению соответствуют моды $\mathbf{v}_{k,1,0}^T$. Они входят в линейную оболочку множества $\{\mathbf{v}_{k_1,1,0}^T, \mathbf{v}_{k_2,2,0}^P, \mathbf{v}_{k_3,3,0}^T, \mathbf{v}_{k_4,4,0}^P, \dots\}$, которая инвариантна относительно кориолисова сноса. Из любой такой моды за счет вращения возбуждаются остальные по цепочке. Тогда, в самом простом случае, полоидальная компонента скорости – это $\mathbf{v}_{0,2,0}^P$. Оказывается, что распределение направления ее кориолисова сноса в объеме оболочки хорошо аппроксимируется комбинацией четырех тороидальных мод: $\mathbf{v}_{0,1,0}^T, \mathbf{v}_{1,1,0}^T, \mathbf{v}_{0,3,0}^T, \mathbf{v}_{1,3,0}^T$. Поэтому, мы задаем скорость как комбинацию этих пяти мод. Коэффициенты выбираем так, чтобы эта комбинация аппроксимировала одну из мод оператора Пуанкаре. Схема расчета таких аппроксимаций описана в [10].

Для представления магнитного поля мы будем использовать некоторые из мод омической диссипации $\mathbf{V}_{k,n,m}^T$ и $\mathbf{V}_{k,n,m}^P$. Их структура подобна описанным выше модам свободной диссипации скорости.

Селекцию магнитных мод произведем по следующей схеме, предложенной в [11].

Пусть магнитное поле представлено линейной комбинацией нескольких мод. Подставим это разложение в уравнение индукции (1.36) и применим метод Галеркина. Получим систему

$$\frac{dg_k}{dt} = \text{Re}_m \sum_i W_{ki} g_i + \text{R}_\alpha \sum_i A_{ki} g_i - \eta_k g_k, \quad (1.2)$$

где $g_k(t)$ – амплитуды отобранных мод, а η_k – их собственное значения. Матрицы W и A образованы галеркинскими коэффициентами.

Рассмотрим собственные значения матрицы системы (1.2). Назовем лидирующим и обозначим λ то из них, которое имеет наибольшую действительную часть. Соответствующую ему моду также назовем лидирующей. Ясно, что динамо работает, тогда и только тогда, когда $\Re \lambda > 0$. Решения будут осциллирующими, если число λ мнимое.

В соответствии с подходами работы [11] магнитное поле представляется минимальным количеством низших (по собственным значениям) мод, достаточных для получения осциллирующего динамо.

Варьируя параметры Re_m и R_α мы установили, что осциллирующие решения возникают, если ограничиться следующими тремя низшими модами: $\mathbf{V}_{0,1,0}^P$ (диполь), $\mathbf{V}_{0,2,0}^T$ и $\mathbf{V}_{0,3,0}^P$. Далее будем обозначать их \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_3 соответственно.

Разумеется, собственные значения системы (1.2) зависят и от вида радиальной части α -эффекта $a(r)$. Мы использовали три варианта: $a(r) = 1$, $a(r) = r$, $a(r) = 1/r$.

Отметим, что в работе [11] для получения осциллирующего решения авторам потребовалось 5 магнитных мод для динамо в звезде с тонкой конвективной оболочкой, но они использовали тороидальную скорость типа дифференциального вращения. Скорее всего, меньшее число мод в нашей работе можно объяснить более сложной структурой поля скорости.

На рисунке 1.1 изображены области осциллирующего и неосциллирующего динамо для $a(r) = 1/r$. Другие варианты $a(r)$ дают очень похожие области, поэтому далее мы ограничиваемся только этой зависимостью.

Введем теперь в систему (1.2) механизм алгебраического подавления α -эффекта и осцилляции:

$$\frac{dg_k}{dt} = \text{Re}_m (1 + \zeta(t)) \sum_i W_{ki} g_i + \frac{\text{R}_\alpha (1 + \xi(t))}{1 + \sum_j g_j^2} \sum_i A_{ki} g_i - \eta_k g_k, \quad (1.3)$$

где $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ – стохастические процессы с нулевым средним.

Как говорилось выше, эти процессы моделируют спонтанно возникающее и исчезающее когерентное влияние отброшенных высших мод скорости и магнитного поля. Структура процессов следующая.

Зададим на оси времени случайную последовательность точек $0 < \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_k < \theta_k < \dots$. Будем считать, что k -ая по счету когерентная структура образуется в

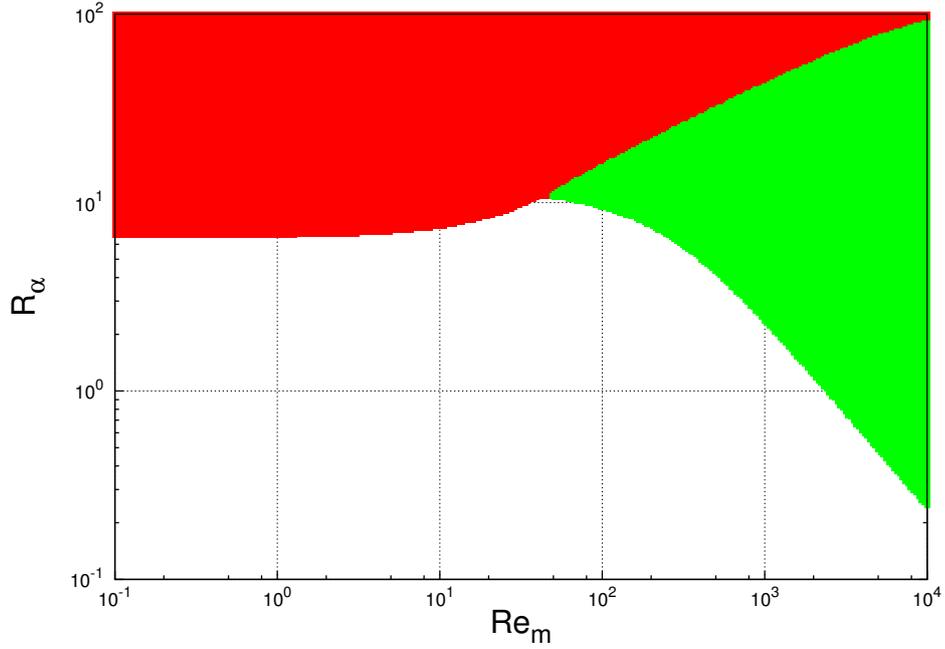


Рисунок 1.1 — Области генерации поля. Красные точки – неосциллирующее динамо; зеленые точки - осциллирующее динамо.

момент τ_k и разрушается в момент θ_k . Тогда $T_k^{est} = \tau_k - \theta_{k-1}$ – время ожидания формирования очередной структуры, а $T_k = \theta_k - \tau_k$ – время ее существования. В течение времени ожидания процессы $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ нулевые, а в течение времени существования $\zeta(t) = \zeta_k$ и $\xi(t) = \xi_k$. Здесь ζ_k и ξ_k независимые случайные величины с нулевым средним. Законы распределения этих величин, а также T_k^{est} и T_k выбираются при численном моделировании.

1.1.3 Численное моделирование

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов с моделью (1.3).

Из рисунка 1.1 видно, что точкой бифуркации в линейном приближении (1.2) является граничная точка красной, зелёной и белой областей, т. е. $(Re_m, R_\alpha) \approx (49, 11)$.

Сначала мы проводили расчет решений системы (1.3) при (Re_m, R_α) из окрестности точки (49,11) и тождественно нулевым $\zeta(t)$ и $\xi(t)$. В нелинейном случае точка бифуркации сместилась в $(Re_m, R_\alpha) \approx (42.15, 5.45)$. Оказалось также, что система сильно чувствительна не только к изменению параметров, но и к начальным условиям.

Поэтому можно было ожидать, что влияние даже малых по интенсивности флуктуаций будет переключать модель между различными режимами динамо.

При моделировании мы использовали показательный закон распределения для времен ожидания и существования T_k^{est} и T_k , причем сами эти величины были независимыми. Средние значения $\langle T_k^{est} \rangle = 5$ и $\langle T_k \rangle = 30$, т. е. время характерное время существования когерентных структур значительно меньше времени их ожидания.

Величины скачков ζ_k и ξ_k были равномерно распределены на отрезках $[-0.01; 0.01]$ и $[-0.1; 0.1]$, соответственно.

Такое большое различие в выборе дисперсии скачков обусловлено следующими соображениями. α -эффект имеет турбулентную природу, поэтому его отклик на перестройку структуры турбулентности, т. е. ξ_k , может быть значительным. Возникающее в результате в магнитном поле возмущение посредством силы Лоренца изменяет средние крупномасштабные течения. У нас это последнее изменение описывается скачком ζ_k . Поэтому представляется разумным, что интенсивность флуктуаций в турбулентном генераторе должна быть значительно выше, чем в крупномасштабном.

Выбирая различные значения (Re_m, R_α) из малой окрестности точки бифуркации и различные начальные условия, мы получали разнообразные режимы динамо: квазипериодические, динамо-всплески, исчезновение поля с последующим возбуждением, нерегулярные перебросы.

На рисунке 1.2 приведены примеры двух реализаций. По вертикальной оси отложена безразмерная амплитуда дипольной компоненты.

Вверху приводится в основном квазипериодическое решение. Есть лишь отдельные сбои в динамо-цикле. Такое решение похоже на солнечное динамо. Стоит отметить почти полное исчезновение поля при $340 \leq t \leq 370$ и на нескольких более коротких промежутках. Здесь есть определенная аналогия с минимумом Маундера, сбой в работе динамо-машины.

Решение в нижней части рисунка 1.2 характеризуется крайне нерегулярными инверсиями, что типично для геодинамо.

Итак, в предложенной простой модели динамо при близких значениях управляющих параметров удастся воспроизвести различные режимы динамо, которые наблюдаются в реальных динамо-системах. Разумеется, все такие решения удавалось получать многим авторам и ранее как в результате прямого численного моделирования, так и на простых моделях.

Достоинство предложенной модели в том, что она не связана со строением конкретного небесного тела и не требует знания распределения его физических параметров.

Источником регулярных инверсий в модели служит ее внутренняя динамика, а нарушение этой цикличности, сбои в работе динамо-машины, выход на режим хаотических инверсий обусловлены перестройкой структуры турбулентности.

1.1.4 Заключение по подразделу

Предложенная в настоящей работе модель позволяет описывать различные известные режимы космических динамо-систем, в частности, различные режимы инверсий.

Простота этой модели позволяет легко модифицировать ее для различных небесных тел. Так, в зависимости от величины аспектного отношения, можно адаптировать ее к планетам земного типа, гигантским планетам, полностью конвективным звездам, звездам с тонкой конвективной оболочкой. При этом будут меняться параметры мод скорости, что, возможно,

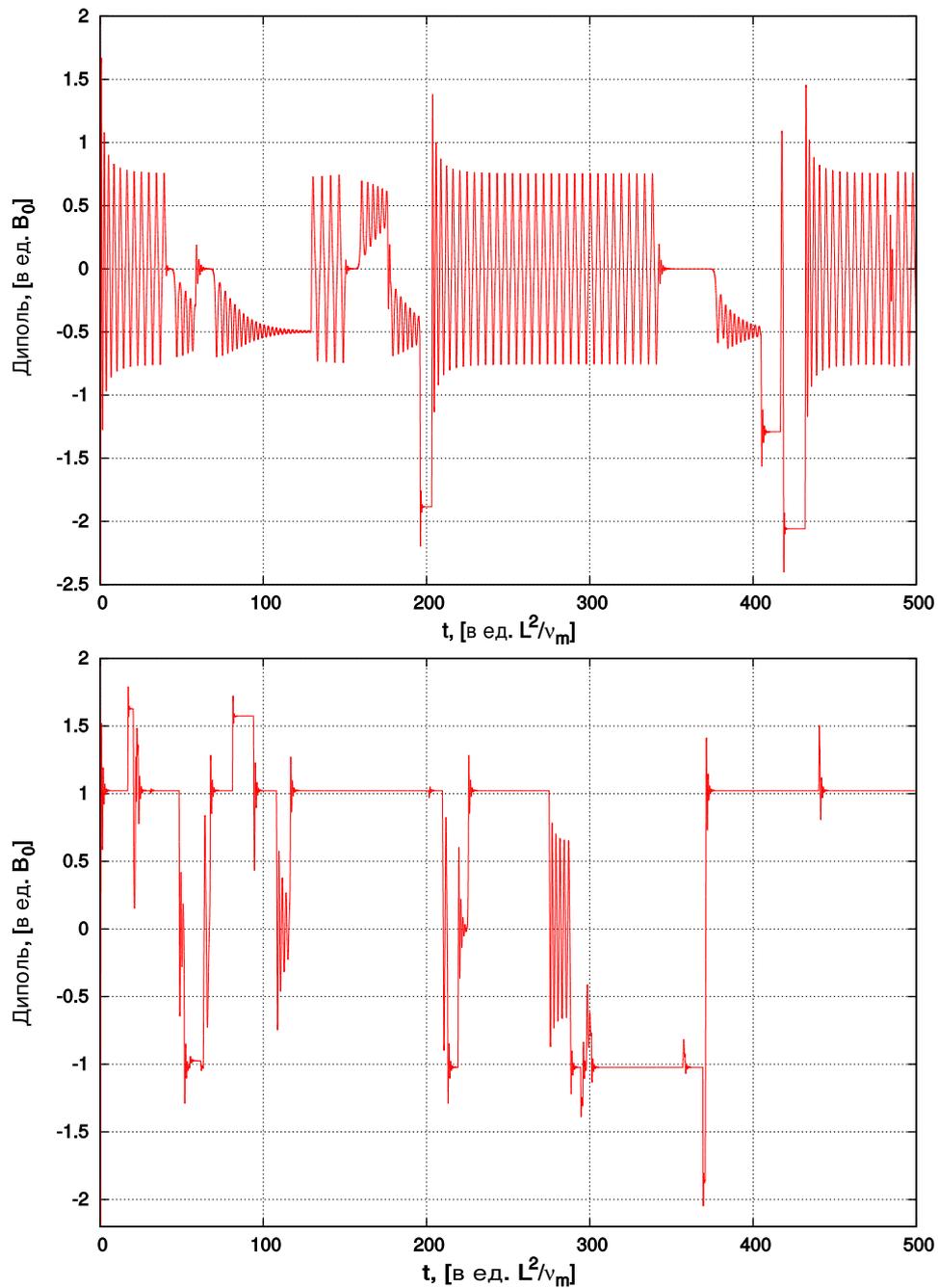


Рисунок 1.2 — Режимы изменения амплитуды диполя. Наверху: $(Re_m, R_\alpha) = (42.2, 5.5)$. Внизу: $(Re_m, R_\alpha) = (42.2, 5.7)$.

изменит набор магнитных мод или их количество. Знания физических параметров конкретного небесного тела при этом не требуется.

Большое разнообразие режимов можно обеспечивать также различными распределениями времен T_k^{est} и T_k . Для простоты мы выбирали при моделировании показательное распределение. Однако, известно, что для турбулентности более характерными являются распределения степенного типа. Представляется, что введение степенных распределений даст еще более сложную статистику инверсий, характерных, например, для палеомагнитной шкалы.

Результаты, описанные в настоящем подразделе опубликованы в работах авторов [12, 13].

1.2 Инверсии в шестиструйной модели динамо

1.2.1 Введение в подраздел

Процесс формирования магнитных полей планет и звезд успешно объясняются теорией гидромагнитного динамо. Существующие модели конвекции в жидких ядрах планет и конвективных зонах звезд воспроизводят гидродинамические потоки, которые могут генерировать магнитные поля, близкие к реальным [14, 15, 16].

Производительность современных вычислительных систем не позволяет вести прямое численное моделирование трехмерных задач планетарного и звездного динамо на временных масштабах порядка времени существования небесного тела. В связи с этим, численные модели или воспроизводят МГД-течения на достаточно мелкой пространственной сетке на сравнительно небольших временах (~ 50 тыс. лет), или позволяют рассчитывать длительную эволюцию только крупномасштабных пространственных структур. Ясно, что для моделей первого типа пространственная структура потоков рассчитывается в процессе моделирования численного, а крупномасштабную структуру конвекции для моделей второго типа необходимо явно задавать. В этой связи возникает ключевой вопрос о том, какова реальная структура крупномасштабной конвекции.

В этом подразделе главы мы опишем модель геодинамо с инверсиями, управляемого шестью конвективными ячейками. Приведем, прежде всего, соображения в пользу именно такой структуры.

Косвенная информацию об этой структуре для ядра Земли может быть получена из данных о неоднородностях плотности жидкого ядра. Результаты некоторых исследований splitting-функций свободных колебаний Земли были проанализированы в статье [17]. автором этой работы были получены срезы распределения плотности на различных глубинах. Splitting-функция сфероидальной моды свободных колебаний ${}_{11}S_4$, имеющая максимум на глубине жидкого ядра показана на рисунке 1.3. Четко просматривается 12-зонная шахматная структура, которая в первом приближении описывается сферическими гармониками Y_4^2 . Автором цитируемой работы была высказана гипотеза о соответствующей структуре конвекции, где в шести областях вещество ядра «тонет», а в шести – «всплывает».

Понятно, что такой структуре соответствует 6 конвективных ячеек, причем две ячейки расположены в экваториальной области, и в каждом полушарии расположены еще по две ячейки. Они сдвинуты относительно экваториальных ячеек на 90° по долготе. Такую конвективную структуру далее будем называть шестиструйной.

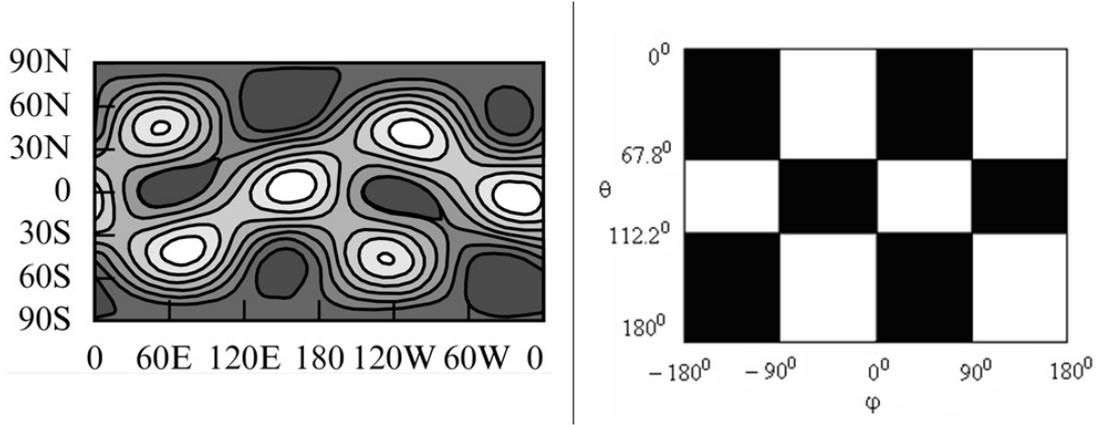


Рисунок 1.3 — Карта splitting-функции сфероидальной моды $_{11}S_4$ из работы [17] (слева). Серый - плотность на 0.2 % выше средней, белый - на 0.2 % ниже средней. Карта сферической гармонике Y_4^2 (справа).

Конечно, такая структура конвекции очень дискуссионна. Обычно крупномасштабную структуру рассматривают в виде вращающихся колонок, так называемых колонок Буссе [14], что несовместимо с конвективными ячейками в экваториальных областях.

Тем не менее, мы положили эту гипотезу в основу нашей модели. Мы хотим понять, может или нет такая конвекция генерировать магнитное поле подобное реальному геомагнитному полю. Речь идет о таких характерных чертах, как дипольный тип поля, преобладание тороидальной компоненты поля над полоидальной, наличие инверсий [3]. Насколько нам известно, модели геодинамо, управляемые конвекцией с такой структурой авторы начали рассматривать впервые и рассматривают на протяжении ряда лет. Эти результаты были описаны в цикле работ [18, 19, 20, 21, 22, 10]. В настоящем подразделе изложены наиболее свежие результаты, опубликованные в статье [10].

Мы будем строить крупномасштабную модель в виде относительно маломерной динамической системы с помощью некоторых модификаций классических спектральных методов.

1.2.2 Основные уравнения

Рассматриваем сферический слой вязкой несжимаемой жидкости (жидкое ядро), вращающийся вокруг оси Oz с угловой скоростью Ω . В сферической системе координат (r, θ, φ) граница внутреннего ядра (ICB) — это $r = r_i$ и граница ядро-мантия (СМВ) — это $r = r_o$. Температура на ICB и СМВ постоянна и равна T_i и T_o , соответственно.

Уравнения МГД-конвекции в ядре, учитывающие α -эффект, в приближении Буссинеска имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{E}{\text{Pm}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= E\nabla^2\mathbf{v} - \nabla p - 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \text{RaPm}T\mathbf{r} + \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(T + T_s) &= \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}} \nabla^2 T, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + R_\alpha \nabla \times (\alpha \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}, \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ – оператор полной (субстанциональной) производной.

Параметры модели – безразмерные число Экмана $E = \nu/\Omega r_o^2$, число Рэлея $\text{Ra} = \beta g_0 \delta T r_o / \nu \Omega$, число Прандтля $\text{Pr} = \nu/\kappa$, магнитное число Прандтля $\text{Pm} = \nu/\eta$ и амплитуда α -эффекта R_α . В этих выражениях ν обозначает кинематическую вязкость, β – коэффициент объемного расширения, g_0 – ускорение свободного падения на СМВ, $\delta T = T_i - T_o$ – разность температур между ИСВ и СМВ, κ – коэффициент теплопроводности и η – магнитная вязкость.

Такой выбор безразмерных параметров означает, что r_o , r_o^2/η , δT и $\sqrt{\mu_0 \rho \omega \eta}$, где ρ – плотность и μ – магнитная проницаемость, являются единицей длины, единицей времени, единицей температуры и единицей магнитной индукции, соответственно. С учетом аспектного отношения для жидкого ядра принимаем, что $r_i = 0.35$.

В уравнениях (1.4) переменная T означает отклонение температуры от равновесного профиля $T_s = \frac{1/r - 1}{1/r_i - 1} + T_i - 1$.

Мы считаем, что турбулентность изотропна и используем для α -эффекта скалярную параметризацию в форме $\alpha = a(r) \cos \theta$, где $\max |a(r)| = 1$.

Для скорости \mathbf{v} ставятся граничные условия прилипания $\mathbf{v}(r = r_i) = \mathbf{v}(r = r_o) = 0$. Также считаем, что магнитные проницаемости внутреннего и внешнего ядер одинаковы и вне ядра среда непроводящая. Поэтому для магнитного поля ставятся условия потенциальности на СМВ и конечности в центре Земли. Наконец, температурное отклонение T полагается нулевым на ИСВ и СМВ.

Далее мы используем некоторые спектральные разложения для скорости, температуры и магнитного поля. С помощью метода Галеркина, на основе этих разложений будут получены уравнения 6-струйной модели.

1.2.3 Конвективная часть модели

Конвективная часть нашей модели составляется так, чтобы совпадать с моделью Лоренца для конвекции в плоском слое. Это совпадение является не просто формальным, но и по самой идее построения.

Напомним, что при получении системы Лоренца используется одна мода скорости и две моды температуры [23]. В качестве моды скорости используется одна из собственных мод свободных колебаний в слое вязкой жидкости. Вертикальная составляющая этой моды не имеет

нулей по радиальной переменной между границами слоя, т.е. она обеспечивает полный перенос жидкости между границами. Температурная мода также является одной из собственных мод свободных колебаний температуры (собственных мод оператора Лапласа). Одна из них согласована с пространственной структурой моды скорости, а вторая однородна по поверхности сферы и изменяется только в вертикальном направлении. Эта мода имеет один нуль между границами.

В нашей модели будут использоваться аналогичные моды. Важным является то, что при любом одномодовом приближении для скорости процедура Галеркина обнулит кориолисов член в уравнении Навье-Стокса. Поэтому необходимо использовать моду скорости, пространственная структура которой содержит информацию о вращении слоя. В качестве такой моды можно использовать одну из мод свободных колебаний вязкой жидкости во вращающейся оболочке, т.е. одно из решений спектральной задачи

$$\begin{aligned} \frac{E}{\text{Pm}} \mu \mathbf{v} + E \nabla^2 \mathbf{v} - 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}(r = r_i) = \mathbf{v}(r = r_o) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для удобства, мы сохраняем те же безразмерные параметры, что и в уравнении (1.4).

Невязкий аналог этой задачи обладает косоэрмитовой симметрией и известен как задача Пуанкаре. Поэтому далее мы будем называть решения задачи (1.5) модами Пуанкаре. В вязком случае оператор задачи не обладает эрмитовой или косоэрмитовой симметрией. Это создает большие проблемы с получением ее явных решений [24].

Мы будем использовать простейшие аппроксимации этих решений с помощью собственных мод свободных колебаний невращающейся оболочки. Структура таких мод хорошо известна. Формально они удовлетворяют спектральной задаче

$$\begin{aligned} \frac{E}{\text{Pm}} \mu \mathbf{v} + \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}(r = r_i) = \mathbf{v}(r = r_o) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Оператор этой задачи (оператор Лапласа) эрмитов, ее решения распадаются в два ортогональных подпространства тороидальных и полоидальных мод и образуют полную ортогональную систему.

Тороидальные и полоидальные собственные моды имеют вид, соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k,n,m}^T &= R_{k,n}^T(r) \left(\frac{1}{\sin \theta} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_n^m(\theta, \varphi), \\ \mathbf{v}_{k,n,m}^P &= n(n+1) \frac{R_{k,n}^P(r)}{r} Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r + \\ &+ \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) R_{k,n}^P(r) \left(\mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_n^m(\theta, \varphi), \\ k &= 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = -n, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $R_{k,n}^T(r)$ и $R_{k,n}^P(r)$ некоторые комбинации степенных функций и сферических функций Бесселя, а $Y_n^m(\theta, \varphi)$ – сферические гармоники.

Все множество соленоидальных полей, равных нулю на границе, есть прямая сумма линейных ортогональных подпространств, порождаемых следующими наборами мод:

$$\begin{aligned}
H_0^T &= \{ \mathbf{v}_{k_1,1,0}^T, \mathbf{v}_{k_2,2,0}^P, \mathbf{v}_{k_3,3,0}^T, \mathbf{v}_{k_4,4,0}^P, \dots \}, \\
H_0^P &= \{ \mathbf{v}_{k_1,1,0}^P, \mathbf{v}_{k_2,2,0}^T, \mathbf{v}_{k_3,3,0}^P, \mathbf{v}_{k_4,4,0}^T, \dots \}, \\
H_m^T &= \{ \mathbf{v}_{k_0,m,\pm m}^T, \mathbf{v}_{k_1,m+1,\pm m}^P, \mathbf{v}_{k_2,m+2,\pm m}^T, \mathbf{v}_{k_3,m+3,\pm m}^P, \dots \}, \\
H_m^P &= \{ \mathbf{v}_{k_0,m,\pm m}^P, \mathbf{v}_{k_1,m+1,\pm m}^T, \mathbf{v}_{k_2,m+2,\pm m}^P, \mathbf{v}_{k_3,m+3,\pm m}^T, \dots \}, \\
k_i &= 0,1,2, \dots, \quad m = 1,2,3, \dots
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Каждая из этих линейных оболочек инвариантна относительно оператора задачи (1.5). Это легко увидеть, если расписать матрицу оператора в базисе (1.7). Поэтому каждая из мод Пуанкаре целиком лежит в одном из подпространств (1.8).

Для моделирования 6-струйной конвекции важно подпространство H_2^P , включающее полоидальную моду $\mathbf{v}_{0,4,\pm 2}^P$. Формула (1.7) показывает, что радиальная компонента этой моды в (θ, φ) -направлении определяется сферической гармоникой $Y_4^{\pm 2}$.

В нашей модели мы будем использовать только одну моду скорости \mathbf{v}_0 , которая является простейшей аппроксимацией мод Пуанкаре из подпространства H_2^P . Мы задаем \mathbf{v}_0 в виде

$$\mathbf{v}_0 = \beta_1 \mathbf{v}_{1,3,-2}^T + \beta_2 \mathbf{v}_{1,3,2}^T + \beta_3 \mathbf{v}_{0,4,-2}^P + \beta_4 \mathbf{v}_{0,4,2}^P + \beta_5 \mathbf{v}_{0,5,-2}^T + \beta_6 \mathbf{v}_{0,5,2}^T, \tag{1.9}$$

где коэффициенты β_i определяются из задачи (1.5) методом Галеркина.

Видно, что радиальная компонента \mathbf{v}_0 имеет в (θ, φ) -направлении структуру $Y_4^{\pm 2}$.

Теперь рассмотрим собственные моды температурной диссипации во внешнем ядре. Они имеют вид $T_{k,n,m} = X_{k,n}(r)Y_n^m$, где $X_{k,n}(r)$ – это линейные комбинации сферических функций Бесселя 1-го и 2-го рода.

В нашей модели основная температурная мода T_0 должна быть согласована с радиальной компонентой скорости. Поэтому мы определяем ее формулой

$$T_0 = X_{0,4}(r) [\beta_3 Y_4^{-2} + \beta_4 Y_4^2] = \beta_3 T_{0,4,-2} + \beta_4 T_{0,4,2}, \tag{1.10}$$

где β_3 и β_4 – такие же, как и в (1.9).

Вторая температурная мода T_1 выбирается в виде $T_1 = T_{1,0,0} = X_{1,0} Y_0^0$ аналогично моде из системы Лоренца.

Окончательно мы выбираем следующее представление скорости и температуры для нашей модели.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = u(t) \mathbf{v}_0(\mathbf{r}), \quad T(\mathbf{r}, t) = \theta_0(t) T_0(\mathbf{r}) + \theta_1(t) T_1(\mathbf{r}). \tag{1.11}$$

1.2.4 Модель шестиструйного динамо

Для представления магнитного поля будем некоторые моды омической диссипации, т.е. решения спектральной задачи

$$\begin{aligned} \eta \mathbf{B} + \nabla^2 \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{B}(r=0) &\neq \infty, \quad \mathbf{B}^T(r \geq 1) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}^P(r \geq 1) = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где \mathbf{B}^T и \mathbf{B}^P – тороидальные и полоидальные компоненты магнитного поля, соответственно.

Тороидальные и полоидальные решения имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{kn}^m &= a_{kn}^T \nabla \times \left(j_n \left(\sqrt{\eta_{kn}^T} r \right) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r} \right), \\ \mathbf{P}_{kn}^m &= a_{kn}^P \nabla \times \nabla \times \left(j_n \left(\sqrt{\eta_{kn}^P} r \right) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r} \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $j_n(\cdot)$ – сферические функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Собственные значения η_{kn}^T и η_{kn}^P определяются из граничных условий, а a_{kn}^T и a_{kn}^P – нормировочные коэффициенты. Далее будем считать их выбранными так, чтобы среднеквадратическое значение мод в объеме всего ядра Земли было равно 1. Все эти моды образуют ортогональную систему в ядре.

Для отбора магнитных мод будем использовать следующую схему, предложенную в [11].

Прежде всего, упорядочим моды по возрастанию собственных значений, т.е. по скорости диссипации. Получим следующую последовательность, где рамками выделены дублеты – пары мод с одинаковыми собственными значениями: $\mathbf{P}_{01}^{-1..1}$, $\boxed{\mathbf{T}_{01}^{-1..1}, \mathbf{P}_{02}^{-2..2}}$, $\boxed{\mathbf{T}_{02}^{-2..2}, \mathbf{P}_{03}^{-3..3}}$, $\mathbf{P}_{11}^{-1..1}$, $\boxed{\mathbf{T}_{03}^{-3..3}, \mathbf{P}_{04}^{-4..4}}$, $\boxed{\mathbf{T}_{11}^{-1..1}, \mathbf{P}_{12}^{-2..2}}$, $\boxed{\mathbf{T}_{04}^{-4..4}, \mathbf{P}_{05}^{-5..5}}$, ... Далее, выберем несколько мод с минимальными собственными значениями (начальный отрезок последовательности), обозначив их $\mathbf{B}_k(\mathbf{r})$.

Запишем магнитное поле в виде $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_k g_k(t) \mathbf{B}_k(\mathbf{r})$ и подставим это выражение в уравнение индукции (третье уравнение системы (1.4)). Скорость временно положим равной (1.11), где $u(t) = u_0 = \text{const} > 0$. Мода скорости \mathbf{v}_0 считается нормированной на среднеквадратическое значение в объеме жидкого ядра. Тогда u_0 можно интерпретировать как магнитное число Рейнольдса Re_m . Теперь применим метод Галеркина и получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dg_k}{dt} &= \text{Re}_m \sum_i W_{ki} g_i + \text{R}_\alpha \sum_i A_{ki} g_i - \eta_i g_i, \\ W_{ki} &= \int \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_i) \mathbf{B}_k dV, \\ A_{ki} &= \int \nabla \times (a(r) \cos \theta \mathbf{B}_i) \mathbf{B}_k dV, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где η_i – собственное значение моды \mathbf{B}_i .

Фактически, мы получили маломодовое приближение для задачи кинематического динамо с 6-струйной структурой скорости. Обозначим через λ_i собственные значения матрицы системы (1.14). Динамо будет работать, если $\Lambda = \max \Re \lambda_i > 0$. Координаты соответствующего

собственного вектора определяют некоторую комбинацию магнитных мод $\mathbf{B}_k(\mathbf{r})$. Комбинация с наибольшей вещественной частью будет лидирующей, поскольку обгонит по скорости роста любую другую. При этом, если собственное значение для лидирующей комбинации комплексное, то решение системы (1.14) будет осциллировать.

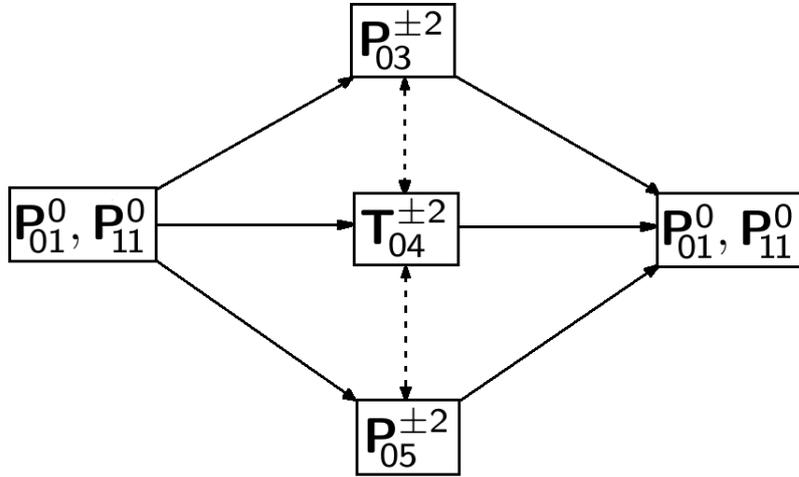


Рисунок 1.4 — Схема динамо. Сплошные стрелки – крупномасштабный генератор; пунктирные стрелки – α -генератор.

Далее, мы будем постепенно увеличивать число магнитных мод, пока не начнет работать осциллирующее динамо. Конечно, собственные значения зависят от параметров Re_m и R_α , и радиального профиля $a(r)$ в параметризации α -эффекта. Мы использовали два выражения для профиля – $a(r) = 1$ и $a(r) = r$. Оказалось, что результаты качественно не отличаются. Параметры варьировались в логарифмической шкале в диапазоне $[10^{-1}; 10^3]$. После получения осциллирующего кинематического динамо мы отбрасываем некоторые промежуточные моды, которые не меняют качественно ситуацию и не снижают существенно порог генерации.

В результате реализации такой схемы, были отобраны следующие магнитные моды: $\mathbf{P}_{01}^0, \mathbf{P}_{03}^{\pm 2}, \mathbf{P}_{11}^0, \mathbf{T}_{04}^{\pm 2}, \mathbf{P}_{05}^{\pm 2}$.

Схема генерации магнитных мод крупномасштабной конвекцией и α -эффектом показана на рисунке 1.4, а области генерации, области осциллирующего и неосциллирующего динамо на плоскости параметров (Re_m, R_α) показаны на рисунке 1.5.

Из этих рисунков видно, что при достаточно больших R_α генерация поля возможна только за счет α -эффекта (т.н. α^2 -динамо), но при этом не будет генерироваться дипольная компонента. Напротив, при больших Re_m поле будет генерироваться только крупномасштабной конвекцией без α -эффекта, но это поле не будет осциллировать.

В вышеописанном кинематическом динамо возможен только неограниченный рост поля. Для получения стабильной генерации ограниченного поля необходимо введение механизма подавления. Физически это реализуется за счет влияния поля посредством силы Лоренца на структуру течений. В связи с этим, рассмотрим области, выделенные на рисунке 1.5 эллип-

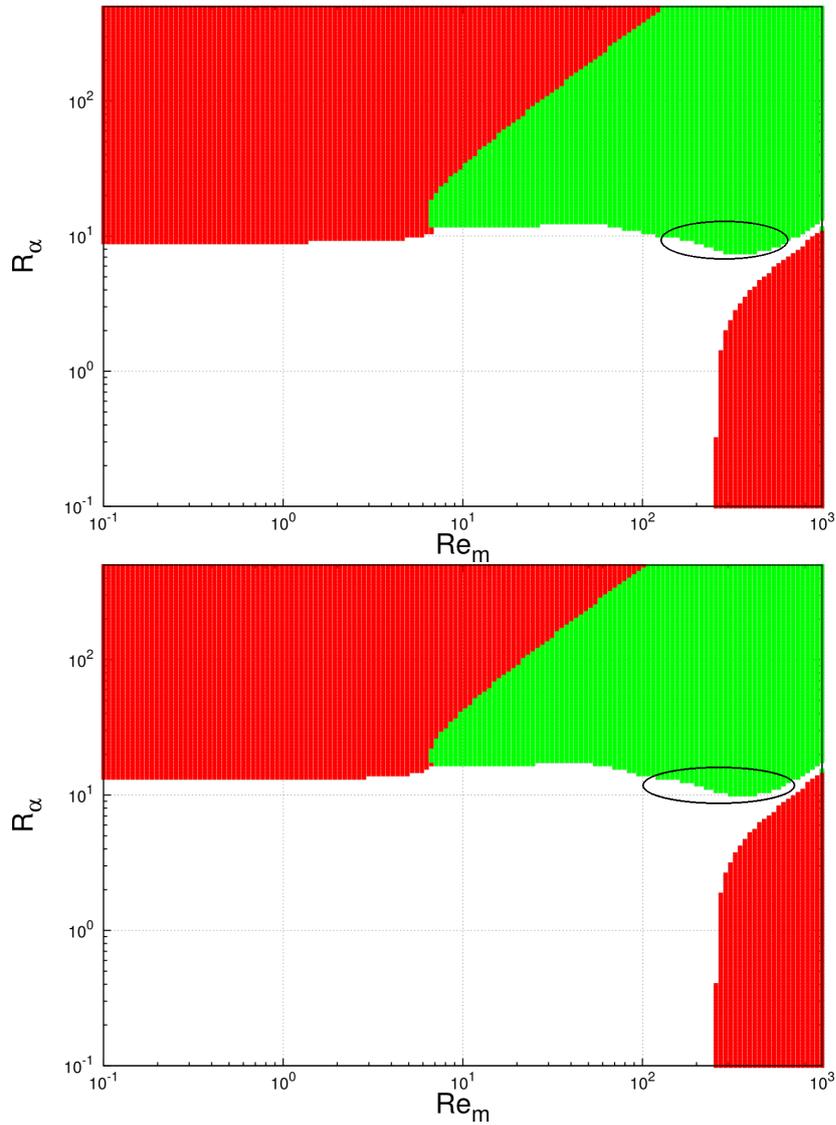


Рисунок 1.5 — Области генерации поля. Красные точки – неосциллирующее динамо; зеленые точки – осциллирующее динамо. Наверху $a(r) = 1$, внизу $a(r) = r$.

сами. Зафиксируем $R_\alpha \sim 15$. И пусть теперь точка (Re_m, R_α) колеблется вдоль большей оси эллипса, изменяя Re_m . При этом она попеременно то входит в область генерации, то покидает ее. Тогда можно надеяться на получение устойчивой ограниченной генерации.

Напомним, что в нашей конструкции Re_m – это фиксированное значение амплитуды $u(t)$ скоростной моды \mathbf{v}_0 . Поэтому далее мы рассмотрим модель магнитогидродинамической конвекции с переменной величиной скорости. Для этого вышеописанные разложения скорости, магнитного поля и температуры надо подставить во все уравнения Eq. (1.4) и применить метод Галеркина.

Получим нелинейную динамическую систему, описывающую самосогласованную 6-струйную магнитогидродинамическую конвекцию в ядре Земли:

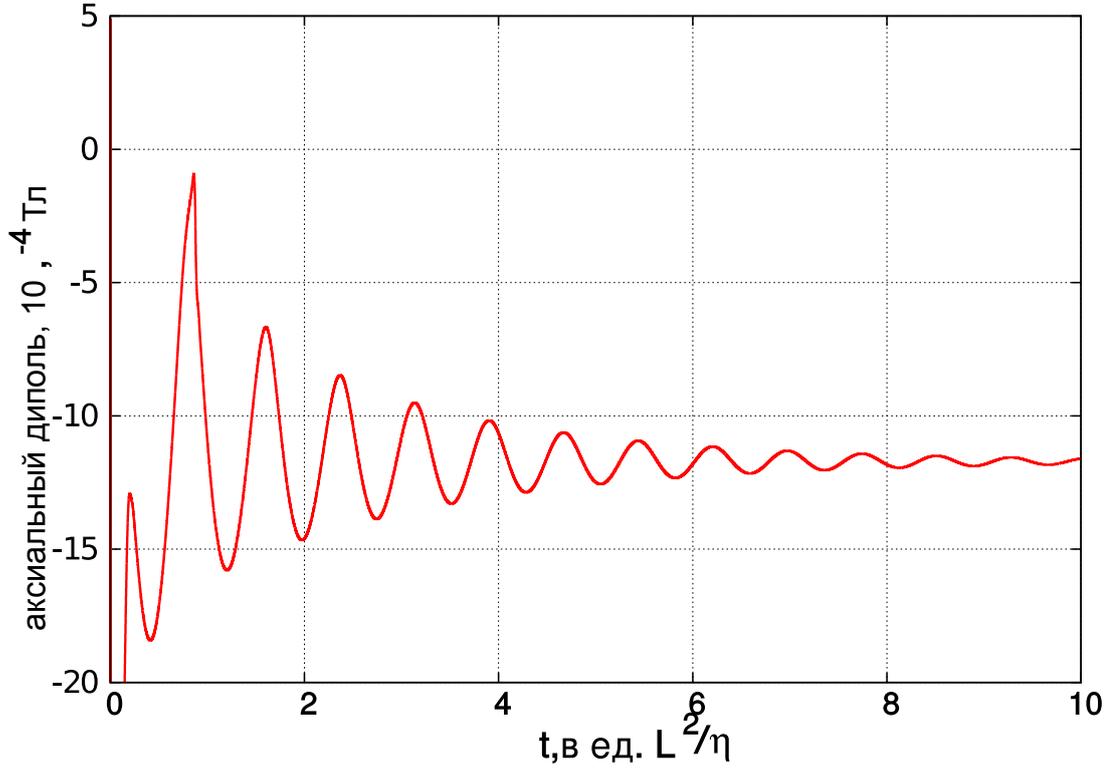


Рисунок 1.6 — Амплитуда аксиального диполя: $Ra = 5000$, $R_\alpha = 5$.

$$\begin{aligned}
\frac{E}{Pm} \frac{du(t)}{dt} &= -E\mu u(t) + RaPmS\theta_0(t) + \sum_{i,j=1}^8 L_{ij}g_i(t)g_j(t), \\
\frac{d\theta_0(t)}{dt} &= -Fu(t)\theta_1(t) + Hu(t) - \frac{Pm}{Pr}\zeta_0\theta_0(t), \\
\frac{d\theta_1(t)}{dt} &= Fu(t)\theta_0(t) - \frac{Pm}{Pr}\zeta_1\theta_1(t), \\
\frac{dg_k(t)}{dt} &= u(t) \sum_{i=1}^8 W_{ki}g_i(t) + R_\alpha \sum_{i=1}^8 A_{ki}g_i(t) - \eta_i g_i(t), \\
k &= 1, \dots, 8,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где ζ_i — собственные значения температурных мод T_i , а $\mu > 0$, S , L_{ij} , F , H — галеркинские коэффициенты.

1.2.5 Результаты моделирования инверсий

При проведении вычислительных экспериментов с моделью (1.15) мы использовали турбулентные значения диссипативных коэффициентов $\nu = 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$, $\kappa = 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$, $\eta = 20 \text{ м}^2/\text{с}$ [25]. Внешний радиус ядра $r_o = 3480 \text{ км}$, а угловая скорость $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ рад/с}$. Соответствующие значения параметров модели: $E = 10^{-7}$, $Pr = 10^4$, $Pm = 5$. Также мы считали, что $R_\alpha \sim 15$, следуя оценкам, полученным в [26]. Значения числа Рэлея варьировались в диапазоне $Ra = 10^2 \div 10^4$.

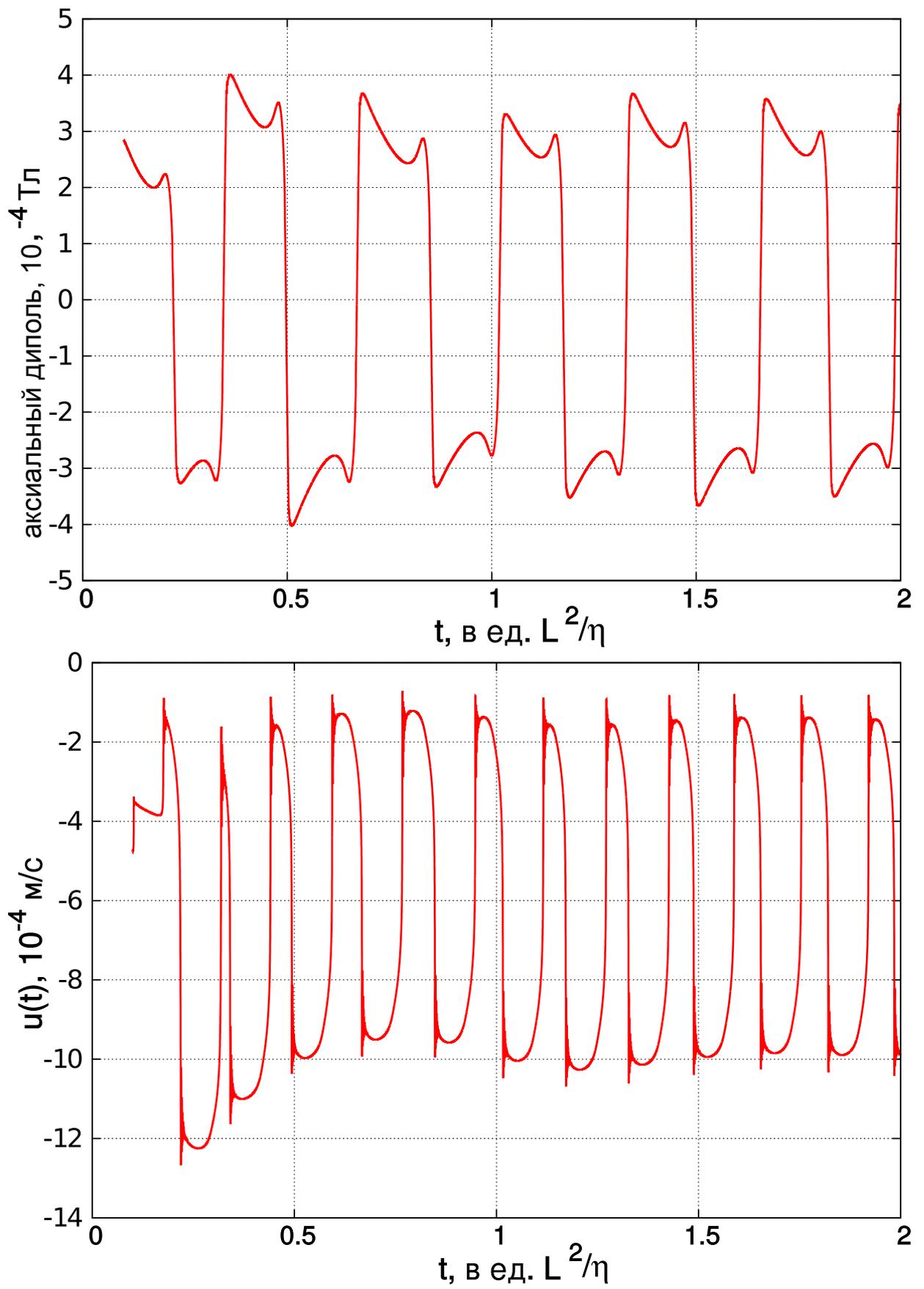


Рисунок 1.7 — Амплитуда моды скорости и дипольной части магнитного поля: $Ra = 5000$, $R\alpha = 15$.

Система (1.15) решалась численно с использованием стандартных библиотек пакета SciLab.

В результате расчетов мы установили следующие условия возникновения генерации поля. Если $R_\alpha < 10$, то при достаточно больших значениях числа Рэлея ($Ra \sim 10^3$) генерируется магнитное поле без инверсий (рисунок 1.6). Если $R_\alpha > 22$, то начинается неограниченный рост поля. Эти результаты хорошо согласуются с расчетами в кинематическом приближении (рисунок 1.5). В нашей модели амплитуда α -эффекта постоянна, поэтому при больших значениях R_α , когда фактически включается α^2 -динамо, нет возможности подавления поля.

Для $10 \leq R_\alpha \leq 22$ и $Ra > 300$ динамо работает в стабильных режимах с регулярными инверсиями магнитного поля. Рисунок 1.7 показывает временные графики амплитуд скорости и дипольной части поля при $Ra = 5000$.

Видно, что магнитное поле и скорость колеблется. Однако, если магнитное поле регулярно меняет направление, то знак скорости не меняется. Таким образом, в модели реализованы развороты, без изменения режима конвекции. Такая динамика типична в рассмотренном диапазоне значений R_α и Ra .

Реализация режима инверсий является одним из основных требований, предъявляемых к моделям геодинамо. Есть множество моделей, которые воспроизводят инверсии. Различные модели позволяют получать регулярные или случайные последовательности инверсий, свойства которых сильно отличаются. В некоторых моделях решения являются периодическими или квазипериодическими [27, 4], в других случаях они явно стохастичны и даже проявляют ярко выраженные фрактальные свойства [28, 29].

Некоторые стохастические свойства палеомагнитной шкалы удается воспроизвести даже на моделях в виде малоразмерных динамических систем [4, 30, 7], для достижения сложной стохастической динамики рассматривают модели среднего поля с шумовым аддитивным и/или мультипликативным возбуждением α -эффекта [31, 32, 33]. Хорошие результаты дает и прямое численное моделирование [34, 35, 36, 37, 38], однако временной диапазон вычислений, к сожалению, очень мал для хорошего проявления статистических свойств. Степенную асимптотику распределения интервалов полярности удалось воспроизвести в работе авторов [8].

В нашей модели мы можем воспроизвести лишь простейший вариант инверсий в виде регулярной последовательности. Представляется, что получение хаотических инверсий в такой простой динамической модели невозможно, необходимы случайные возмущения для их моделирования. Стоит отметить, что интервал полярности в модели ~ 3000 лет, что хорошо согласуется со средней длительностью реального интервала геомагнитной полярности [3].

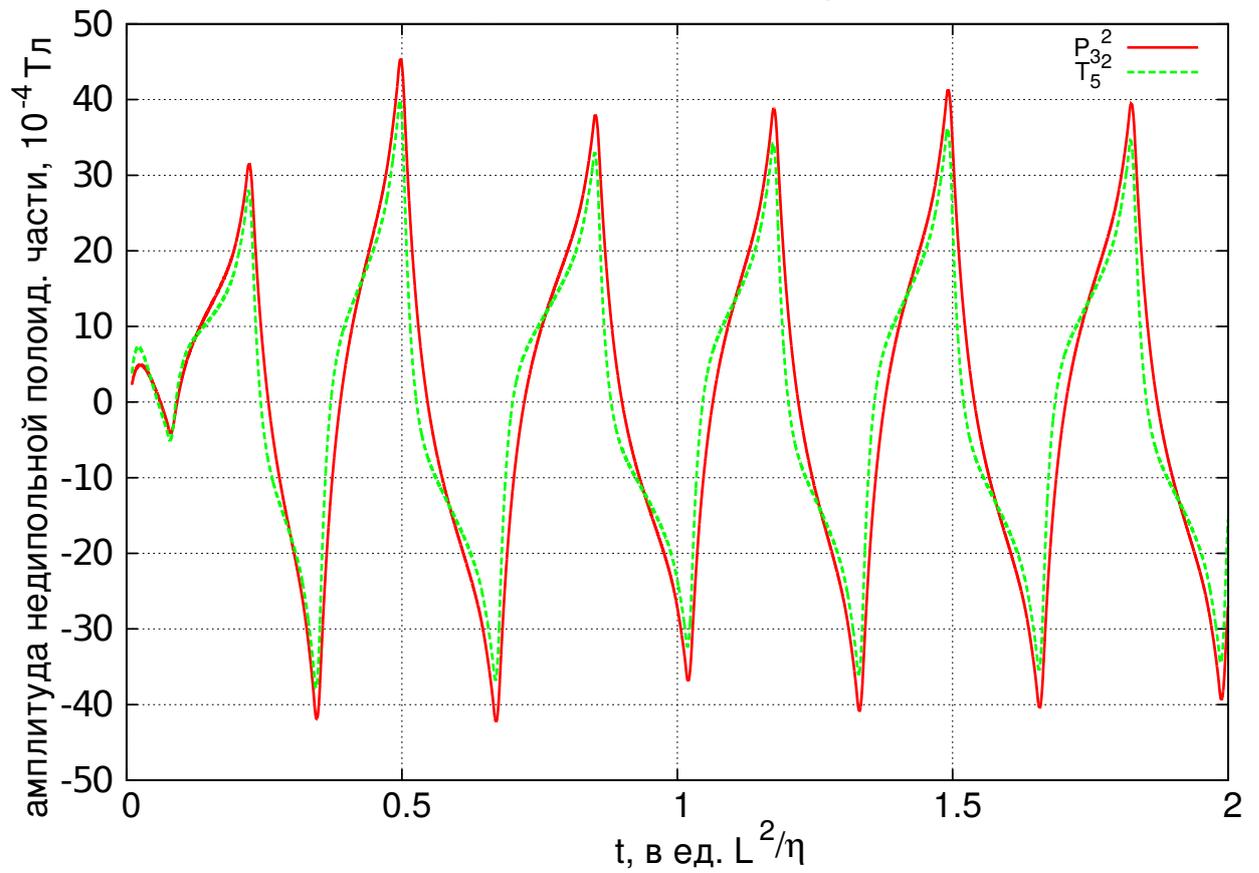
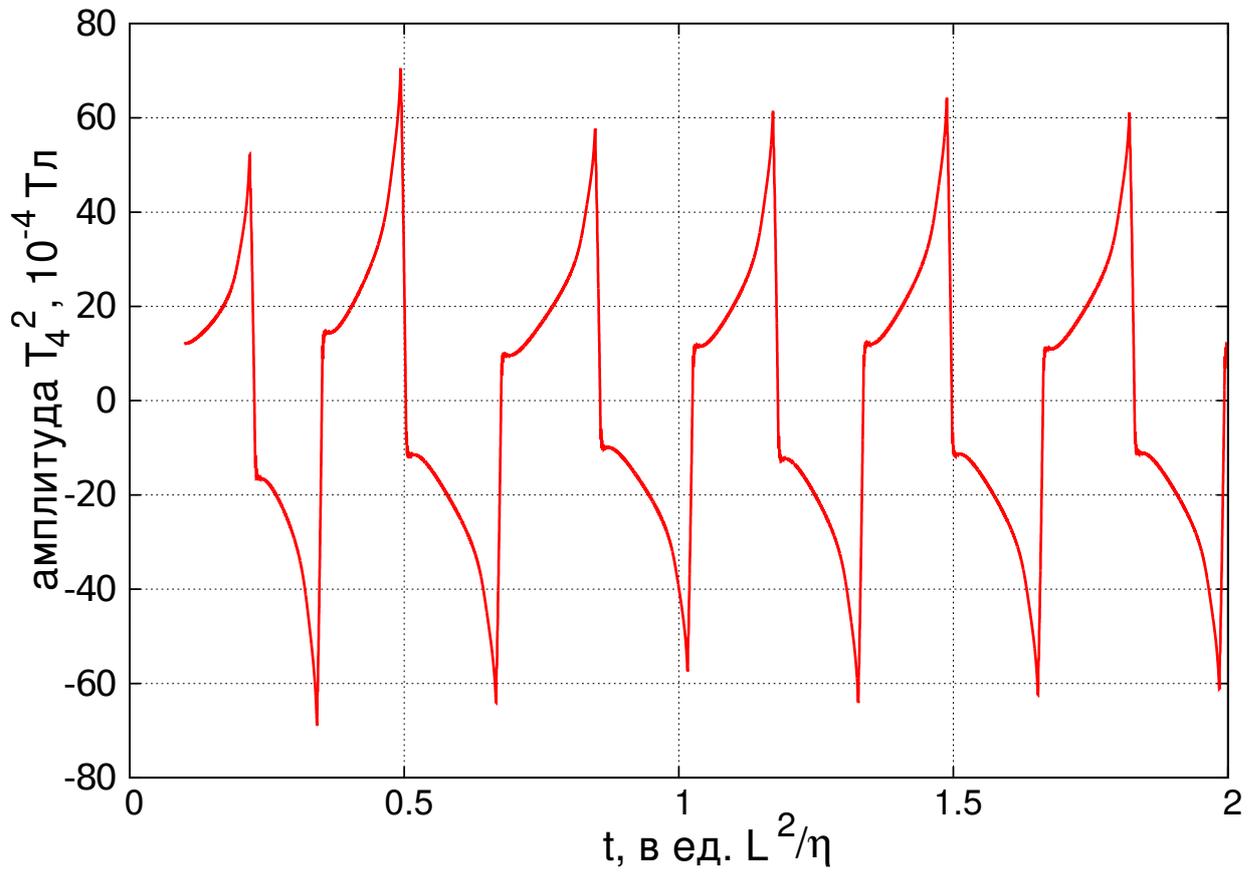


Рисунок 1.8 — Амплитуды тороидальной моды \mathbf{T}_{04}^2 (вверху) и полоидальной моды \mathbf{P}_{03}^2 , \mathbf{P}_{05}^2 (внизу): $Ra = 5000$, $R_\alpha = 15$.

Конечно, к численным значениям в такой простой модели следует относиться осторожно. Тем не менее, отметим, что характерное значение скорости конвекции на рисунке 1.7 составляет 5×10^{-4} м/с. Это согласуется с известными оценками реальной скорости конвекции $\sim 10^{-4}$ м/с [14]. Характерное значение поля в модели 5×10^{-4} Т также хорошо согласовано с экстраполяцией реальной величины, наблюдаемой на поверхности Земли, на границу ядро–мантия [3].

Известные оценки и результаты прямого численного моделирования показывают, что тороидальное поле в ядре примерно на порядок превышает полоидальное [14, 3]. Рисунок 1.8 показывает величину тороидальной и полоидальной недипольной компонент. Из сравнения рисунков 1.7 и 1.8 видно, что тороидальная и недипольная полоидальная компоненты на порядок превосходят дипольную. Получается, что наша модель дает сильно завышенное значение недипольной части поля.

В целом, учитывая простоту модели, можно сделать вывод, что гипотетическая 6-струйная конвекция может генерировать поле, подобное реальному.

1.2.6 Выводы по подразделу

Разработана маломодовая модель геодинамо, управляемая 6-струйной конвекцией в ядре Земли. Модель основана на косвенных данных о крупномасштабной структуре конвекции. Эти данные были получены ранее из splitting-функций свободных колебаний Земли.

В основу нашей модели мы положили гипотезу В.В. Кузнецова [17] о существовании в ядре 6 конвективных ячеек. Четыре из них расположены в полярных областях, и две – в экваториальных. Такая гипотеза противоречит результатам прямого численного моделирования конвекции в ядре Земли и экспериментальным данным о движении жидкостей во вращающихся сферических оболочках. Соответствующие данные и расчет крупномасштабной структуры свидетельствуют о формировании в ядре вращающихся вертикальных колонок (колонок Буссе).

Тем не менее, нам кажется, что игнорировать данные о расщеплении свободных колебаний Земли нельзя. Конечно, вопрос о том, может ли функция расщепления дать информацию о фактической неоднородности ядра, дискуссионен. Тем не менее, в этой работе, мы просто приняли гипотезу и попытались ответить на вопрос о том, может ли такая конвекция создать магнитное поле, подобное реальному, или нет. Геодинамо с подобной структурой конвекции ранее не изучалось.

Отметим лишь, что конвективная структура с 6 ячейками была получена для жидкого ядра Земли в результате прямого численного моделирования для некоторых значений параметров [41]. В этой работе по три конвективные ячейки располагались в каждом полушарии. Полоидальная составляющая скорости этой конвекции связана со сферической гармоникой Y_4^3 . Эта 6-ячейковая структура ближе к вертикальным колонкам. Поэтому представляет интерес в дальнейшем построение комбинированной модели 6-ячейковой конвекции, в которой верти-

кальная составляющая скорости будет описываться линейной комбинацией гармоник Y_4^2 и Y_4^3 . Мы предполагаем изучить эту модель в будущем.

Заметим, что разложение скорости в комбинацию собственных мод задачи (1.5) не имеет преимуществ по сравнению с классическим разложением по базису из собственных мод задачи (1.6), при построении модели с хорошим разрешением по пространству. Оператор задачи (1.5) не эрмитов, поэтому собственные моды не ортогональны. Таким образом, обоснование сходимости метода Галеркина для такой системы весьма проблематично. Но, при работе с маломодовыми моделями, вопросы сходимости и скорости сходимости не принципиальны. Достаточно лишь, чтобы система мод обладала в некотором смысле «хорошими» аппроксимирующими свойствами. Преимущество предлагаемого нового базиса в том, что его члены являются структурно устойчивыми при вращении, так что даже одномодовое приближение содержит и тороидальные и полоидальные компоненты.

Численное моделирование показывает, что в модели может быть реализован устойчивый режим генерации магнитного поля с инверсиями. Важно, что эти инверсии не вызывают изменений в структуре конвекции.

Характерное значение скорости конвекции в модели хорошо согласуется с имеющимися оценками реального значения скорости по западному дрейфу магнитного поля. Дипольные и тороидальные компоненты модельного поля имеют тот же порядок величины, что и у реального геомагнитного поля. Для полоидальной недипольной компоненты модель дает сильно завышенные значения.

Инверсии поля в модели имеют регулярный характер, в отличие от реальной хаотической последовательности. Вероятно, получить хаотические инверсии в такой простой динамической модели невозможно, необходимы случайные физически обоснованные возмущения системы.

В целом, учитывая простоту модели, мы полагаем, что гипотетическая 6-струйная конвекция может генерировать магнитное поле подобное реальному.

Результаты, описанные в настоящем подразделе, опубликованы в работе авторов [10].

1.3 Степенное распределение инверсий в эредитарной модели крупномасштабного $\alpha\Omega$ -динамо

1.3.1 Введение в подраздел

Существующие крупномасштабные магнитные поля планет, звезд и галактик обычно объясняют работой механизма динамо [1]. Магнитогидродинамические уравнения симметричны относительно смены знака магнитного поля, что обеспечивает потенциальную возможность инверсий в динамо-системах. Такие инверсии и наблюдаются в реальных космических динамо-системах. Инверсии магнитного поля Солнца происходят примерно каждые 11 лет [42]. Информацию об инверсиях геомагнитного поля мы получаем по палеомагнитным записям – фиксации

остаточной намагниченности в изверженных горных породах во время их кристаллизации, на основе которых составляется шкала геомагнитной полярности. Последовательность моментов инверсий геомагнитного поля носит ярко выраженный случайный характер [3]. Бросается в глаза резкое отличие статистических свойств последовательности инверсий магнитных полей Солнца и Земли. Однако, говоря о геомагнитных инверсиях, мы рассматриваем усредненное состояние дипольной компоненты за время порядка тысячи лет [3]. Поэтому различие в инверсиях магнитных полей Солнца и Земли – это различие в процессах на совершенно разных временных масштабах.

Известно, что различные шкалы геомагнитной полярности являются самоподобными фрактальными структурами [43, 44, 45]. Величины промежутков времени между инверсиями (интервалов полярности) отличаются на несколько порядков, существуют длительные промежутки вообще без инверсий, так называемые суперхроны [46, 3]. Большой разброс величин интервалов не позволяет корректно использовать такие стандартные статистические характеристики как среднее значение или дисперсию. Известно, что случайные величины с такими свойствами как самоподобие множеств реализаций на разных масштабах и отсутствие конечных моментов могут быть описаны степенными законами распределений [47].

Разумеется, нельзя надеяться на построение модели динамо, которая воспроизвела бы реальную палеомагнитную шкалу. Возможно лишь получение с помощью численного моделирования тех или иных статистических характеристик. Различные модели геодинамо формируют случайные последовательности инверсий, с существенно различными статистическими свойствами. В некоторых моделях решения периодические или квазипериодические [27, 4], в других – демонстрируют фрактальные свойства [28, 29].

В теории среднего поля α -эффект и турбулентная диффузия обычно предполагаются локализованными во времени и пространстве. Математически это означает, что тензоры α -эффекта и турбулентной диффузии в данной точке пространства и в данный момент времени определяются значениями полей скорости и магнитного поля в этой точке и в этот же момент времени. Однако, аккуратное описание турбулентного переноса включает сверточные интегралы от среднего поля [48, 2]. В работе [49] показано, что учет эффекта памяти, т.е. делокализации во времени, для магнитного числа Рейнольдса сильно влияет на работу динамо. Бранденбург, используя формализм функций отклика, показал, что учет пространственной нелокальности в форме сверточных интегралов имеет большую значимость для анизотропных течений [50].

В настоящей главе мы описываем простейшую модель крупномасштабного $\alpha\Omega$ -динамо с возмущением α -эффекта немарковским импульсным случайным процессом. Физически этот процесс можно осмысливать как эффект влияния отброшенных мод среднего поля. По мнению авторов, немарковский характер процесса принципиален, поскольку он в простейшей форме вводит «память» (эредитарность) в модель, без использования интегральных операторов сверточного типа со степенными ядрами.

1.3.2 Уравнения крупномасштабного $\alpha\Omega$ -динамо

Механизм $\alpha\Omega$ -динамо был предложен Паркером [51]. Этот вид динамо типичен для астрофизических объектов (планет, звезд, галактик) и предполагает дифференциальное вращение объекта в целом и турбулентный характер движения проводящей среды в этом объекте.

Идея такого динамо в следующем. Пусть в начальный момент существует полоидальное поле дипольного типа. Благодаря дифференциальному вращению силовые линии поля за счет эффекта «вмороженности» закручиваются вокруг оси вращения. Это создает тороидальное поле в конвективной зоне звезды или жидком ядре планеты.

Для замыкания динамо-цикла необходима генерация нового полоидального поля из тороидального. Считается, что это происходит благодаря нарушению зеркальной симметрии турбулентного потока. Зеркально-ассиметричный поток создает эффективную электродвижущую силу в направлении тороидального поля (α -эффект), которая порождает новое полоидальное поле. Теория α -эффекта была разработана в работах [52, 53]. Детальное количественное описание теории среднего поля приводится в книгах [2, 48, 1].

Уравнения индукции для магнитного поля в проводящей среде имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{1.16}$$

где \mathbf{v} – поле скорости среды, а ν_m – магнитная вязкость, предполагаемая постоянной.

Если поле скорости задано, то уравнения (1.16) являются линейными и образуют задачу кинематического динамо. Однако, магнитное поле влияет на течение среды посредством силы Лоренца. Соответствующее этой силе слагаемое в уравнении движения среды квадратично по магнитному полю, поэтому в случае слабого магнитного поля можно ограничиваться кинематическим приближением. Формальным критерием применимости кинематического приближения является выполнение соотношения $E_K \simeq E_B$, где E_K и E_B кинетическая энергия движущейся среды и энергия магнитного поля, соответственно.

В этом случае уравнения (1.16) необходимо решать совместно с уравнениями движения среды или вводить модельное приближение, где \mathbf{v} является заданным функционалом от \mathbf{B} . В любом случае задача становится нелинейной.

В теории среднего поля вводится разложение полей \mathbf{v} и \mathbf{B} на средние поля $\bar{\mathbf{U}}$ и $\bar{\mathbf{B}}$ и флуктуации \mathbf{u} и \mathbf{b} . При этом малость флуктуаций не предполагается. Тогда из уравнений (1.16) получаются уравнения среднего поля [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} &= \nabla \times (\bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{B}} + \alpha \bar{\mathbf{B}}) + \beta \Delta \bar{\mathbf{B}}, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} &= 0.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Здесь α и β – это в общем случае тензоры второго ранга, зависящие от скорости и магнитного поля. Определение вида этой зависимости является основной задачей теории среднего

поля. Свертка $\alpha \bar{\mathbf{V}}$ определяет турбулентную электродвижущую силу (α -эффект), а свертка $\beta \Delta \bar{\mathbf{V}}$ задает диффузию магнитного поля, включающую в себя кроме молекулярной диффузии (омической диссипации) еще и турбулентную диффузию.

Далее мы рассматриваем случай изотропной среды со скалярными α и β . Кроме этого мы считаем, что β постоянна.

Пусть B_0 и u_0 характерные значения скорости и магнитного поля, соответственно, α_0 максимальное значение величины α -эффекта, L – характерный пространственный размер. Мы выбираем в качестве масштаба длины, времени, скорости и магнитного поля значения L , L^2/β , u_0 и B_0 , соответственно.

Тогда уравнения (1.17) запишутся в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} &= R_m \nabla \times (\bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{V}}) + R_\alpha \nabla \times (\alpha \bar{\mathbf{V}}) + \beta \Delta \bar{\mathbf{V}}, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $R_m = Lu_0/\beta$ – магнитное число Рейнольдса, $R_\alpha = L\alpha_0/\beta$ – мера (безразмерная амплитуда) α -эффекта.

Генерация магнитного поля планеты или звезды может быть описана с использованием α^2 -динамо, когда и тороидальная и полоидальная компоненты формируются α -эффектом. Такое динамо может работать в ситуации, когда дифференциальное вращение слабое или вообще отсутствует. Известно, что α^2 -динамо может, в принципе, формировать магнитное поле с доминирующей дипольной составляющей. Однако, возможность получения осциллирующих решений, ассоциируемых с инверсиями, в таком динамо проблематична [2].

Получить осциллирующие решения можно в $\alpha^2\Omega$ -динамо. В этом динамо тороидальное поле генерируется из полоидального как за счет α -эффекта, так и за счет Ω -эффекта. Если интенсивность α -эффекта много меньше интенсивности Ω -эффекта, то вкладом α -эффекта в генерацию тороидального поля можно пренебречь.

Относительно ядра Земли нет единого мнения об относительных величинах α - и Ω -эффектов [36, 26, 54]. Тем не менее, следуя [55], мы считаем, что сильное доминирование осесимметричного диполя в геомагнитном поле является результатом большой роли дифференциального вращения. В соответствии с этим, мы пренебрегаем вкладом α -эффекта в генерацию тороидальной компоненты поля.

Мы считаем, что пространственная структура поля простая и может быть описана одной полоидальной и одной тороидальной модами. Тем самым мы ограничиваемся выделением только наиболее крупномасштабных структур. Приближение имеет вид:

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^T(t) \mathbf{b}^T(\mathbf{r}) + \mathbf{V}^P(t) \mathbf{b}^P(\mathbf{r}). \quad (1.19)$$

Заметим, что это разложение не обязательно предполагает аксиальную симметрию мод.

Мы также считаем, что среднее течение $\bar{\mathbf{U}}$ имеет характер тороидального сдвигового течения. В простейшем случае $\bar{\mathbf{U}}$ – это дифференциальное вращение. Выбранный масштаб

скорости $u_0 = LG$, где $G > 0$ является мерой дифференциальности вращения. Если r – это расстояние от оси вращения и $\Omega(r)$ – угловая скорость, то $G \sim \left| r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|$. Тогда R_m будет мерой интенсивности Ω -эффекта, поэтому далее мы обозначаем его через R_Ω .

Тогда, эволюция поля будет определяться поведением скалярных амплитуд $B^T(t)$ и $B^P(t)$, каждая из которых задается уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{dB^T}{dt} &= R_\Omega B^P - B^T, \\ \frac{dB^P}{dt} &= R_\alpha B^T - B^P, \end{aligned} \tag{1.20}$$

Как говорилось ранее, мы пренебрегаем в первом уравнении (1.20) α -эффектом. Эти уравнения могут быть получены из (1.18) и (1.19) применением метода Галеркина и перемасштабированием t , R_α , R_Ω . Выбирая для t масштабирующий множитель ~ 1 , получим, что время измеряется в характерных единицах магнитной диффузии.

Первое из уравнений (1.20) описывает Ω -этап, а второе описывает α -этап динамо-цикла.

В случае постоянных R_Ω и R_α , генерация поля, т.е. рост малых флуктуаций $B = \sqrt{|B^T|^2 + |B^P|^2}$ возможен тогда и только тогда, когда $R_\alpha > R_\Omega^{-1}$. Поле будет при этом расти с экспоненциальной скоростью. Если $R_\alpha < R_\Omega^{-1}$, то поле затухает. Ограниченное по величине неисчезающее решение может быть только, если $R_\alpha R_\Omega = 1$. Значит, $D = R_\alpha R_\Omega$ является динамо-числом.

Когда $D = 1$, кроме нулевого решения, существует еще континуум стационарных решений $B^T = R_\Omega B^P$ системы (1.20), образующих асимптотически устойчивую прямую в фазовой плоскости этой системы.

Ограниченные ненулевые решения системы (1.17) возможны, если ввести механизм подавления, как модификацию турбулентных характеристик потока магнитным полем посредством силы Лоренца. В моделях типа (1.20) этот механизм вводят в виде зависимости R_α от B . В простейшем случае вводится функциональная зависимость $R_\alpha = f(B(t))$.

Модели такого типа известны как модели с алгебраическим подавлением. В них величина α -эффекта определяется текущим значением поля, т.е. отклик турбулентного потока на изменение среднего поля мгновенный. Простейшая форма такой зависимости предложена в [1]. Более общий вид зависимости на основе представления α -эффекта как разности между кинетической и токовой спиральностями изучался, например, в [56, 57].

1.3.3 Модель с динамической памятью

Во введении к настоящему подразделу говорилось, что включение памяти и нелокальности в модель может привести к значимым эффектам. В связи с этим отметим результаты работы [58]. В статье изучалась модель многомасштабного динамо. Уравнения среднего поля были объединены в одну систему с уравнениями каскадной модели магнитогидродинамической турбулентности. В крупномасштабной части модели авторы используют α^2 -динамо. Интенсивность α -эффекта вычисляется с помощью коллективных переменных каскадной части модели,

а крупномасштабная часть дает граничные значения для первых коллективных переменных. Так реализуется динамический обмен информацией между каскадной и крупномасштабной подсистемами. Как и в нашем случае, эволюция крупномасштабного поля описывается двумя скалярными амплитудами.

Авторы описываемой работы рассчитали кросс-корреляцию между B и амплитудой α -эффекта. Оказалось, что их одновременные значения некоррелированы. Более того, если отклик B на изменение α был очень быстрый (хотя и не мгновенный), обратная связь затухала очень медленно. Авторы работы сделали вывод, что отклик R_α на B носит динамический характер и в принципе не может быть описан с помощью алгебраического подавления.

По нашему мнению, медленное затухание отклика является признаком наличия памяти в такой системе.

Введем механизм памяти в модель (1.20). Это можно сделать двумя способами. В первом случае, R_α является не функцией, а функционалом от B (сверткой интегрального ядра и B). Во втором случае R_α является функцией от B и немарковского стохастического процесса $\xi(t)$. Физически этот процесс можно интерпретировать как эффект воздействия отброшенных мод среднего поля. Тогда зависимость R_α от предшествующих значений B будет реализована опосредованно, через память процесса $\xi(t)$. Эти два варианта памяти далее будем называть динамической и стохастической памятью, соответственно. Разумеется, возможно и комбинирование этих подходов.

Далее, в качестве исходной формы обратной связи будем использовать простейший вариант алгебраического подавления:

$$R_\alpha(t) = R_\Omega^{-1} [1 + \varepsilon (1 - B^2(t))], \quad (1.21)$$

где $\varepsilon > 0$ – модельный параметр, определяющий эффективность обратной связи. Эта простейшая форма зависимости была описана в [1].

Для модели (1.20)-(1.21), существуют три стационарных решения. Прежде всего, это нулевая точка, которая неустойчива, что обеспечивает режим генерации поля. Кроме того, существуют еще и точки вида $B^T = \pm R_\Omega (1 + R_\Omega^2)^{-1/2}$, $B^P = \pm (1 + R_\Omega^2)^{-1/2}$. Легко показать, что эти точки асимптотически устойчивы. Таким образом, модель (1.20)-(1.21) дает генерацию поля с выходом его на характерное значение $B = 1$. Видно, что R_Ω определяет отношение характерных величин торидажной и полидажной компонент. Поэтому в дальнейшем, не теряя общности, при численном моделировании мы будем использовать $R_\Omega = 1$.

Введение памяти динамического типа требует следующей модификации уравнения (1.21):

$$\begin{aligned} R_\alpha &= R_\Omega^{-1} \left[1 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{H(t)} \int_0^t h(t - \tau) B^2(\tau) d\tau \right) \right], \\ H(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где ядро $h(t) \geq 0$ определяет глубину памяти системы.

Модель (1.20)-(1.22) имеет те же точки равновесия, что и (1.20)-(1.21), и вычислительные эксперименты показали, что характер их устойчивости остается тем же самым.

Асимптотическая устойчивость точек $B^T = \pm R_\Omega (1 + R_\Omega^2)^{-1/2}$, $B^P = \pm (1 + R_\Omega^2)^{-1/2}$ не позволяет воспроизводить инверсии в модели.

Снова положим в (1.20) R_α и R_Ω постоянными и рассмотрим решения системы более тщательно. Когда $R_\alpha R_\Omega > 1$, решение растет без осцилляций и характерное время роста составляет $(-1 + \sqrt{R_\alpha R_\Omega})^{-1}$. Когда $0 \leq R_\alpha R_\Omega < 1$, решение затухает без осцилляций за характерное время ~ 1 . Наконец, если $R_\alpha R_\Omega < 0$, решение осциллирует с частотой $\sqrt{|R_\alpha R_\Omega|}$ и затухает за характерное время ~ 1 .

Предположив теперь, что R_α является переменным, мы можем сказать, что для возникновения инверсий необходимы отрицательные выбросы в этом параметре, так как при отрицательном R_α в линейном случае появляются колебания. Они должны быть достаточно сильными, чтобы период колебаний был меньше характерного времени затухания, и достаточно редкими, чтобы механизм обратной связи успевал восстанавливать поле, убывающее во время инверсии.

Эти соображения положим в основу формы стохастической памяти.

1.3.4 Модель со стохастической памятью

Выбросы в величине R_α , необходимые для возникновения инверсий могут быть получены при введении стохастической памяти в виде:

$$R_\alpha(t) = R_\Omega^{-1} [1 + \varepsilon (1 - B^2(t)) + \xi(t)], \quad (1.23)$$

где $\xi(t)$ – некоторый немарковский импульсный процесс, с нулевой медианой. Мы сознательно сейчас говорим о нулевой медиане, поскольку наличие конечных моментов у этого процесса необязательно. Более того, мы будем рассматривать в дальнейшем именно такую ситуацию.

Мы определим случайный процесс $\xi(t)$ формулой

$$\xi(t) = \sum_{\theta_k \leq t} \eta_k \exp \{-\lambda (t - \theta_k)\}. \quad (1.24)$$

Здесь θ_k – возрастающая последовательность моментов возникновения импульсов, η_k – случайные амплитуды импульсов, а постоянная $\lambda^{-1} > 0$ определяет длительность импульса.

Мы считаем, что интервалы между импульсами $\tau_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ независимы в совокупности и одинаково распределены с плотностью распределения $p_\tau(t)$. Амплитуды η_k являются гауссовскими случайными величинами, независимыми между собой и с моментами возникновения импульсов, имеющими нулевое среднее и дисперсию σ^2 .

Важным элементом описываемой модели является закон распределения $p_\tau(t)$. Если он показательный, то импульсы образуют пуассоновский поток событий и процесс $\xi(t)$ будет марковским. Выбор любого другого закона распределения приводит к тому, что, для произвольного момента времени, длительность ожидания ближайшего импульса зависит от того, сколько прошло времени после последнего импульса. Поэтому $\xi(t)$ будет немарковским процессом.

Полагаем, что закон $p_\tau(t)$ имеет степенную асимптотику $\sim 1/t^\gamma, \gamma > 1$. Приведем ряд соображений в пользу этого предположения.

Случайные интервалы времени τ_k можно рассматривать как результат совместного влияния большого числа независимых факторов. Если мы предположим аддитивный характер совместного эффекта, то, в соответствии с обобщенной центральной предельной теоремой, $p_\tau(t)$ должны относиться к классу устойчивых законов [59]. Все такие законы, за исключением гауссова, имеют степенную асимптотику. Отметим, что у устойчивых законов $1 < \gamma < 3$.

Кроме того, только степенные распределения обладают свойством самоподобия, проявляющимся в палеомагнитной шкале. И, наконец, степенные статистики, как правило, характерны для турбулентных явлений, к которым относится и α -эффект.

Явный вид плотности распределения для односторонних устойчивых неизвестен, за исключением распределения Леви-Смирнова ($\gamma = 3/2$). Это вызывает трудности в получении их компьютерных реализаций.

Поэтому в расчетах мы использовали следующее выражение для плотности вероятности

$$p_\tau(t) = \frac{\gamma - 1}{(1 + t)^\gamma}, \quad t \geq 0, \quad 1 < \gamma < 3. \quad (1.25)$$

Эта форма закона распределения позволяет легко получать реализации случайных величин τ_k на компьютере методом обратных функций.

Принятое распределение совпадает с устойчивым одной лишь асимптотически, поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться только асимптотикой распределения интервалов полярности.

1.3.5 Результаты численного моделирования стохастической последовательности инверсий

Для того, чтобы проанализировать воздействие импульсов $\xi(t)$ на поведение поля, мы сначала провели расчеты модели (1.20), (1.23), (1.24) для случая не случайного, а регулярного $\xi(t)$, со знакопередающей последовательностью импульсов $\pm Ae^{-t}, A \geq 0$. Интервал между импульсами составлял 50 единиц, значение $\varepsilon = 0.5$. Начальные условия выбирались в виде $B^T(0) = 0, B^P(0) = 10^{-2}$. Результат этих вычислений представлен на рисунке 1.9.

Видно, что положительные импульсы вызывают резкий скачок поля, но не сопровождаются инверсиями. Отклик на отрицательные импульсы зависит от их величины. Мы видим, что для малых импульсов пологая компонента не меняет знак ($A = 2$), затем $B^P(t)$ меняет знак на короткое время и возвращается к прежнему состоянию ($A = 4.2$). Такое поведение поля известно в палеомагнитных данных и называется экскурсом [3]. Затем происходит инверсия ($A = 10$). При последующем росте инверсия снова сменяется экскурсом ($A = 15$). После этого происходит комбинация экскурса и инверсии ($A = 30$), сменяющиеся двумя последовательными экскурсами ($A = 50$). Тенденция, показанная на рисунке 1.9, сохраняется и далее, например при $A = 100$ происходит комбинация двух экскурсов и инверсии.

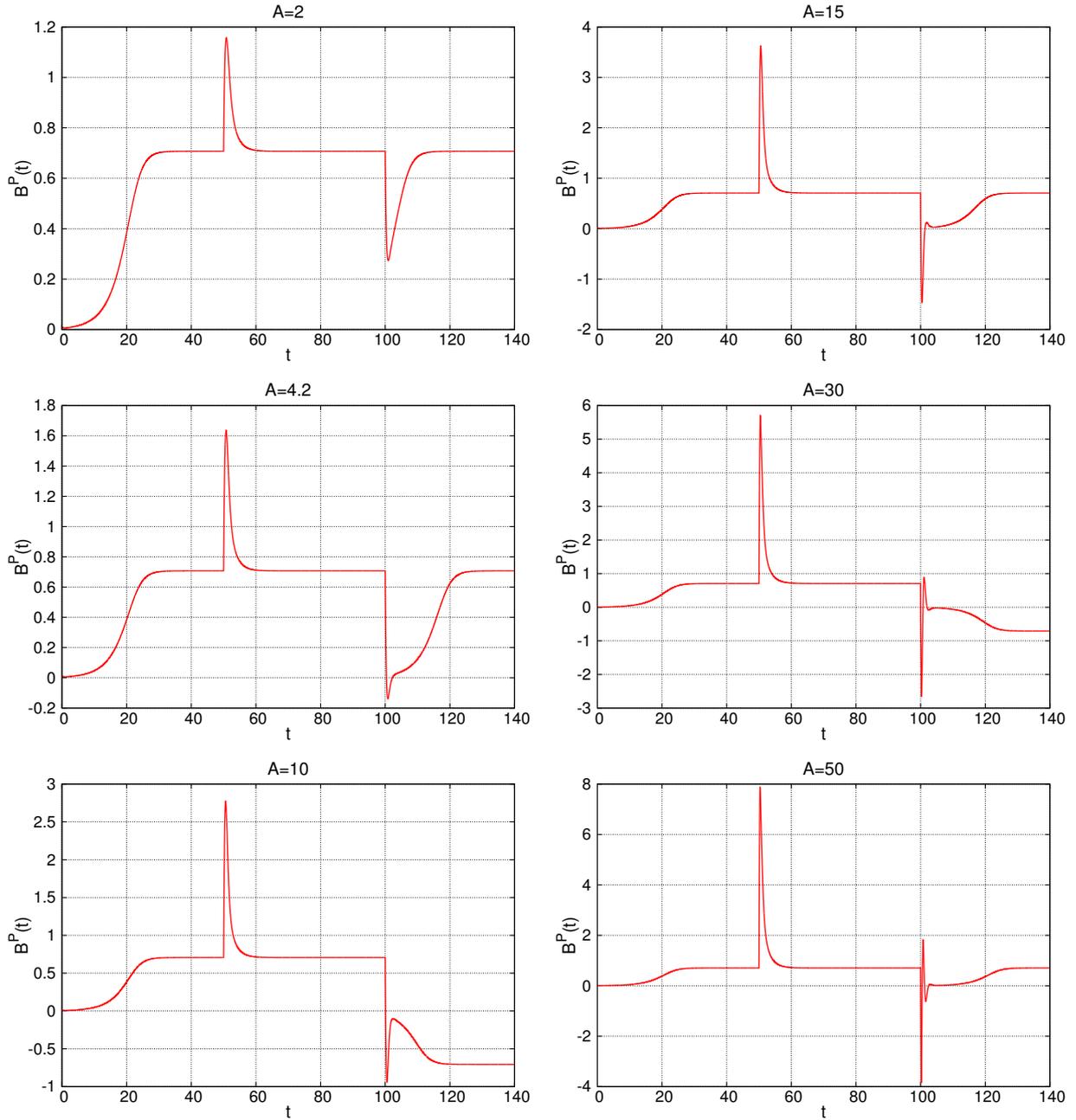


Рисунок 1.9 — Отклик полоидальной компоненты $B^P(t)$ на регулярную последовательность знакопередающих импульсов с различными амплитудами A .

Разумеется, такие резкие выбросы в R_α маловероятны в реальной системе. Также очевидно, что существуют критические значения амплитуды A , разделяющие различные типы реверсирования поля. В частности, критическое значение A , разделяющее случаи $A = 4.2$ и $A = 10$ на рисунке 1.9 составляет 4.455 ± 0.005 .

Также видно, что для выбранного при моделировании значения $\varepsilon = 0.5$ время t_B выхода поля на устойчивое состояние около 30 единиц. В целом, как показали численные эксперименты, эта зависимость имеет степенной характер $t_B \sim \varepsilon^{-0.9}$.

Теперь рассмотрим результаты моделирования системы (1.20), (1.23), (1.25) при случайном процессе $\xi(t)$.

В проведенных вычислительных экспериментах использовались значения параметров $R_\Omega = 1$, $\lambda = 1$. Среднеквадратическое отклонение амплитуд η_k импульсов в уравнении (1.23) составляло $\sigma = 6.6$. Для такого значения σ инверсия в результате отрицательного импульса в $\xi(t)$ происходит с вероятностью ~ 0.5 . Начальные значения компонент $B^T(0) = 0$, $B^P(0) = 10^{-2}$.

Мы предполагаем характерный размер для Земли $L = 3.48 \times 10^6$ м (радиус жидкого ядра), а коэффициент турбулентной магнитной диффузии $\beta = 10$ м²/с. Тогда наше безразмерное время 5×10^4 примерно соответствует протяженности самой длинной шкалы геомагнитной полярности в 1,7 млрд. лет [60]. Поэтому расчеты в модели были проведены до $t = 5 \times 10^4$.

Рисунок 1.10 демонстрирует пример отрезка одной из реализаций тороидальной и полоидальной компонент поля для $\varepsilon = 5$.

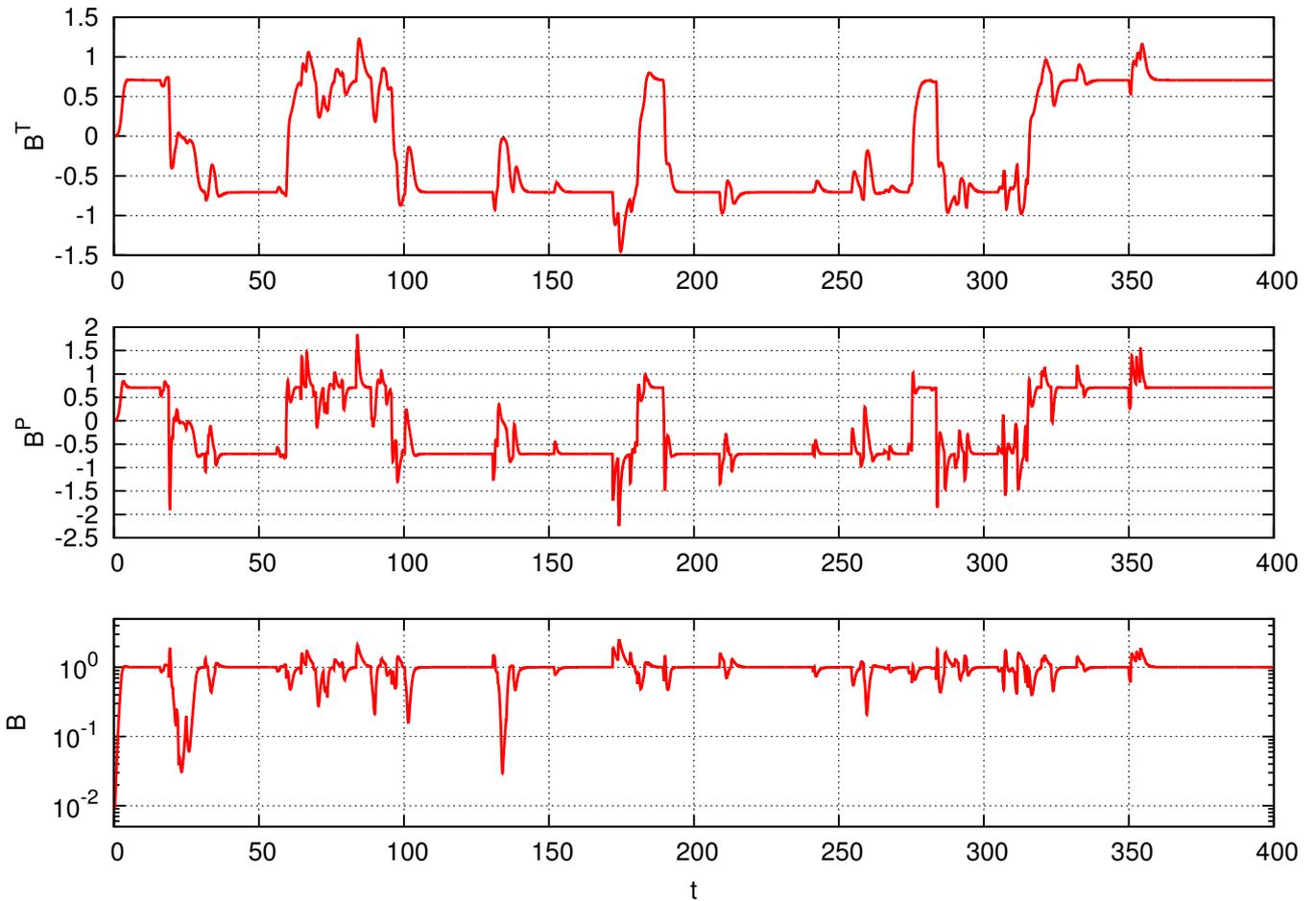


Рисунок 1.10 — Отрезок реализаций магнитного поля для $\varepsilon = 5$, $\gamma = 2.5$: тороидальная компонента B^T , полоидальная компонента B^P , величина поля $B = \sqrt{|B^T|^2 + |B^P|^2}$.

Мы проводили вычисления для различных значений параметров ε и γ . Для ε использовались значения 0.1, 0.5, 1.0, 5.0, а для γ — значения от 1.1 до 2.9 с шагом 0.2. Для каждой

комбинации параметров рассчитывались гистограммы распределения интервалов полярности а фрактальные размерности модельной шкалы полярности.

Во-первых, получено распределение длительности интервалов полярности ζ , изображенное на рисунке 1.11.

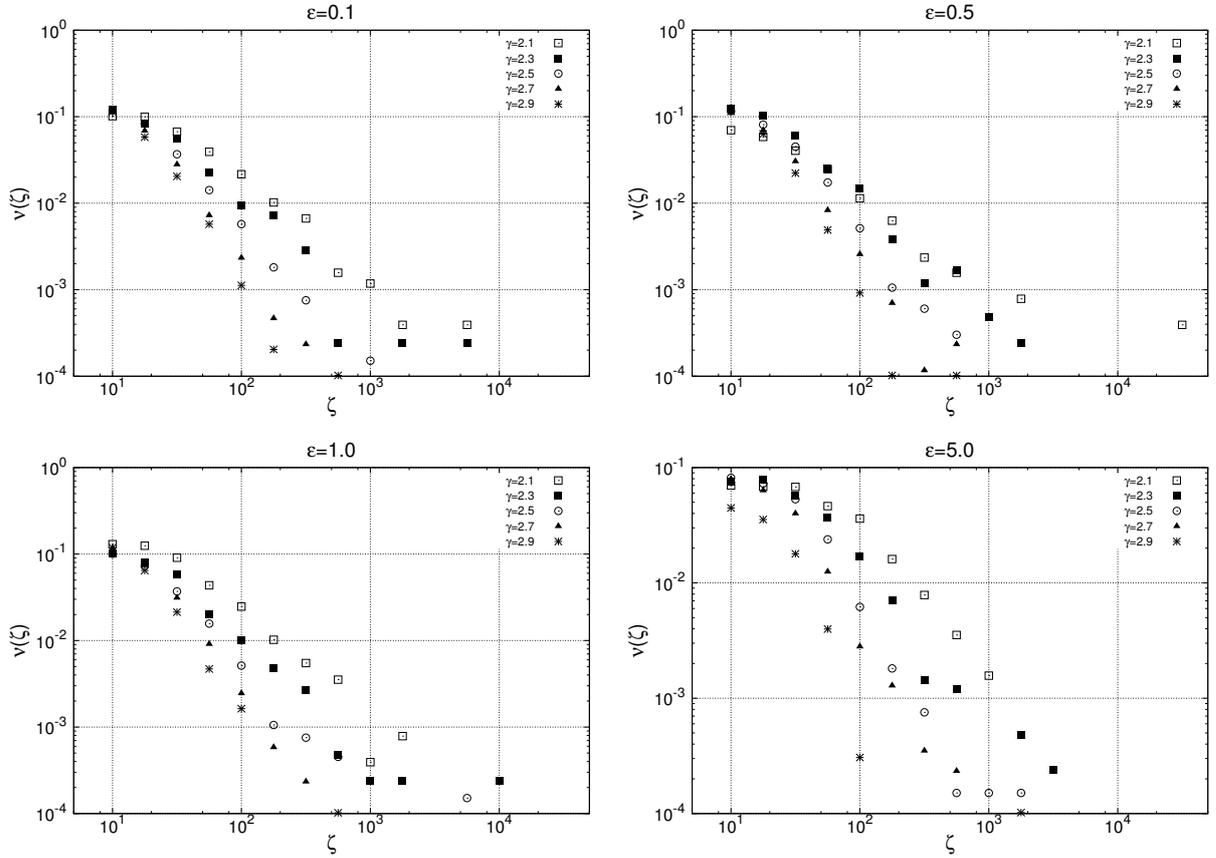


Рисунок 1.11 — Распределение относительных частот ν длин интервалов полярности ζ .

Таблица 1.1 — Показатель степени δ и коэффициент корреляции ρ

γ	ε			
	0.1	0.5	1.0	5.0
2.1	1.05 0.97	0.97 0.99	1.04 0.98	1.12 0.92
2.3	1.11 0.94	1.28 0.98	1.36 0.97	1.49 0.99
2.5	1.53 0.99	1.63 0.99	1.51 0.99	1.93 0.98
2.7	1.93 0.98	1.67 0.98	1.91 0.99	2.04 0.99
2.9	2.22 0.99	2.12 0.98	1.91 0.99	3.53 0.99

Совершенно очевидно, что мы можем говорить о степенной асимптотике распределения этих интервалов $\sim 1/\zeta^\delta$. Точнее говоря, эта асимптотика видна при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.5$, начиная с $\zeta = 10$, и для $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 5$, начиная с $\zeta = 30$. Также видно отклонение от степенного закона

для больших ζ (больше, чем 10^3). С таким значениями ζ связаны единичные события, поэтому эти отклонения можно объяснить малой статистикой.

Мы вычислили значение показателя δ по прямолинейным участкам диаграммы, показанной на рисунке 1.11. Полученные значения и коэффициенты корреляции ρ для соответствующих прямолинейных участков приведены в таблице 1.1. Значения в таблице приведены в формате $\delta||\rho$.

Используя эти значения, легко показать, что для различных ε коэффициент корреляции между γ и δ более, чем 0.92. Это означает, что γ и δ линейно связаны, причем коэффициенты этой связи зависят от параметра ε .

Условие интегрируемости плотности распределения величины ζ требуют неравенства $\delta > 1$. Эти значения получаются из вышеуказанных линейных соотношений при $\gamma > 2.1$. Также отметим, что на рисунке 1.11 не приведены распределения при $\gamma < 1$. Это связано с тем, что при таких значениях γ прямолинейные участки, соответствующие степенным законам, не встречаются на графиках.

Можно сделать вывод о том, что степенное распределение интервала полярности возникает в модели при $\gamma > 2.1$.

Теперь рассмотрим фрактальную размерность смоделированных шкал полярности. При расчете мы следовали процедуре, предложенной в работе [45] для реальных шкал геомагнитной полярности.

Эта схема заключается в следующем. Для шкалы длиной T выберем некоторый интервал длины Δ . Пусть $N(\Delta)$ – это количество таких интервалов, содержащих хотя бы одну инверсию. Если $\Delta \ll T$ и инверсии распределены равномерно, то $N(\Delta) \sim \Delta^{-1}$. Если $\Delta \ll T$ и инверсии распределены неравномерно, то можно ожидать зависимости вида $N(\Delta) \sim \Delta^{-d}$. В этом случае, d будет хаусдорфовой размерностью шкалы инверсий, и при $0 < d < 1$ шкала инверсий окажется фрактальным множеством.

Мы сделали расчеты в модели для указанных выше значений γ и ε . Значение Δ уменьшалось в геометрической прогрессии от 5000 (выполнение условия $\Delta \ll T = 5 \times 10^4$) до ~ 10 .

Графики полученных зависимостей приведены на рисунке 1.12. Зависимость $N(\Delta)$ хорошо аппроксимируется степенным законом. На рисунке легенда показывает значения хаусдорфовы размерности d . Видно, что во всех случаях, $0 < d < 1$, т.е. ряд инверсий фрактальный, хотя есть тенденция к достижению границы диапазона фрактальности, когда γ возрастает.

Следует отметить, что, в соответствии с данным работы [45], хаусдорфовы размерности реальных шкал геомагнитной полярности длительностью 170 млн. лет (ШГП170), 560 млн. лет (ШГП560) и 1.7 млрд. лет (ШГП1700) составляют 0.88, 0.83 и 0.87, соответственно.

1.3.6 Выводы по подразделу

Особенностью шкалы геомагнитной полярности является отсутствие характерного времени ожидания инверсии и самоподобие на различных временных масштабах. Значения интер-

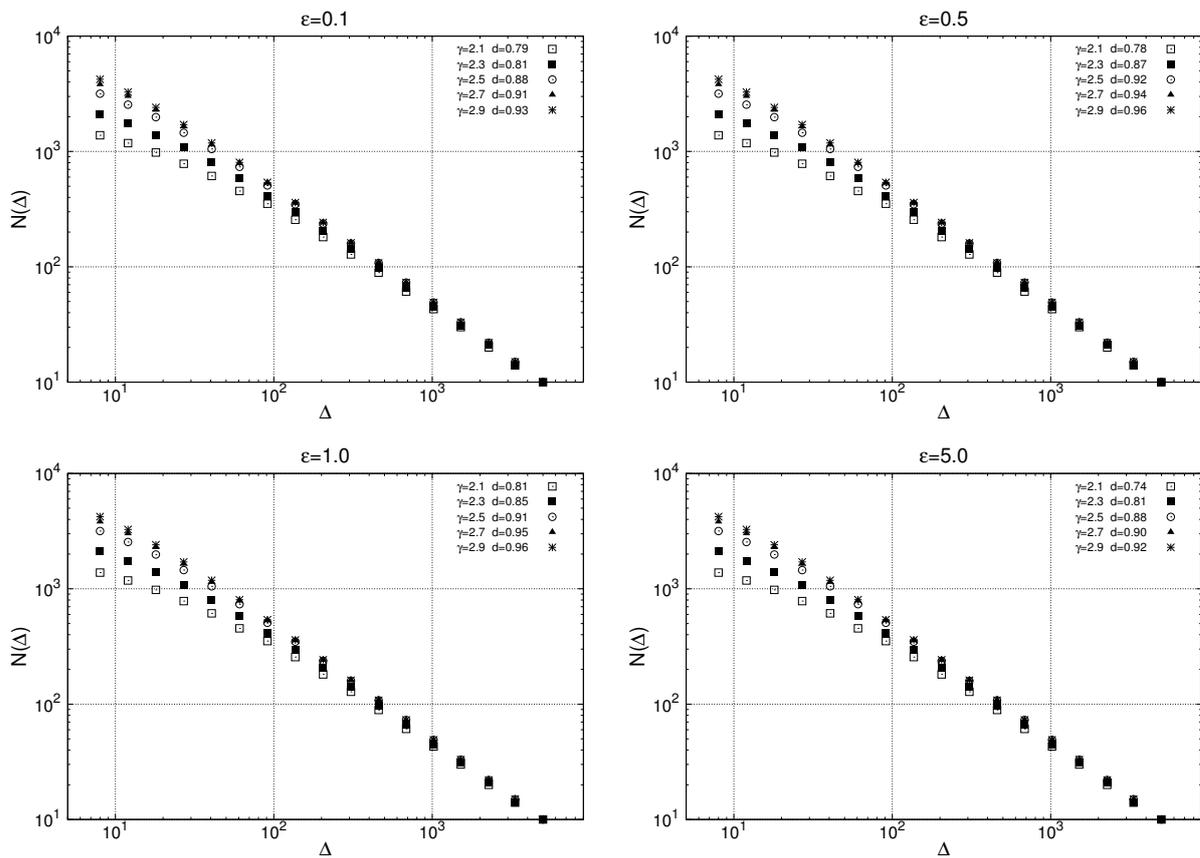


Рисунок 1.12 — Количество $N(\Delta)$ интервалов длительностью Δ , содержащих хотя бы одну инверсию.

валов полярности охватывает несколько порядков и сама шкала хаотична [46, 43, 44, 3, 45]. Одной из задач теории геодинamo является объяснение этого явления и воспроизведение ряда инверсий с аналогичными статистическими свойствами в численном моделировании.

Некоторые стохастические свойства палеомагнитной шкалы получаются в моделях типа динамических систем малой размерности [30, 7, 4, 61], моделях среднего поля с шумовым возмущением α -эффекта [31, 32, 33], при прямом численном моделировании [34, 35, 36, 37].

Прямое численное моделирование показало, что структура магнитного поля и его инверсий существенно зависят от соответствующих управляющих параметров моделей (безразмерных параметров подобия) [37, 39]. Можно сделать вывод, что моделирование каждой инверсии имеет свой уникальный характер, который может существенно отличаться в различных аспектах от других [40].

Вышеперечисленные модели сильно отличаются общим временем моделирования и воспроизводят инверсии с экспоненциальным распределением интервалов полярности. В новом препринте [62] описаны результаты чрезвычайно длительного моделирования в различных моделях, чтобы изучить статистическое поведение колебаний и разворотов диполя. Распределение интервалов полярности получилось экспоненциальным. Также упомянуты медленнее убывающие хвосты распределений, но их статистическая значимость очень низка.

Нашей главной задачей было получить в модели степенной характер распределения интервалов полярности и самоподобие шкалы полярности.

Мы использовали простую модель динамо, где поведение тороидальной и полоидальной компонент поля описывается двумя скалярными амплитудами. Это позволило выполнить многократное моделирование шкалы геомагнитной полярности при различных значениях параметров. Общее время моделирования всегда было 5×10^4 единиц времени турбулентной диффузии, что соответствует $\sim 1.5 \times 10^9$ лет, т.е. сравнимо с наиболее длительной шкалой геомагнитной полярности ШГП1700.

В модели использовано алгебраическое подавление и случайные возмущения в α -эффekte. Эти возмущения реализованы импульсами со случайной интенсивностью и случайным временем ожидания. Такие возмущения можно интерпретировать как результат спонтанного когерентного сложения отброшенных мод. Самопроизвольное формирование подобных когерентных структур хорошо известно в теории турбулентности [9].

Степенной закон был применен в качестве закона распределения времени ожидания импульса. Причиной этого был степенной характер устойчивых распределений – предельных распределений в схеме суммирования независимых случайных величин с медленно затухающей плотностью распределения.

Степенная асимптотика распределения времени ожидания импульса приводит к тому, что возмущающий процесс немарковский. Таким образом, в модели реализована простейшая форма памяти, опосредованно – через стохастическую память немарковских возмущений.

Выяснилось, что закон распределения интервала полярности асимптотически реализуется в этой модели, если показатель γ в распределении времени ожидания импульса не менее, чем 2.1. Показатель δ в распределении интервала полярности оказался линейно связан с γ . Коэффициенты этой линейной связи зависят от меры эффективности обратной связи в α -эффekte.

Показано, что модель шкалы геомагнитной полярности является фрактальным множеством с размерностью Хаусдорфа $\gtrsim 0.7$. Это согласуется с фактической хаусдорфовой размерностью шкалы геомагнитной полярности по данным работы [45].

Таким образом, можно утверждать, что описанная в данной главе модель крупномасштабного динамо позволяет воспроизводить основные черты процесса инверсий геомагнитного поля.

Результаты, описанные в настоящем подразделе, опубликованы в работах авторов [8, 12].

1.4 Программное обеспечение для численного моделирования крупномасштабного $\alpha\Omega$ -динамо

Рассматривается модель $\alpha\Omega$ -динамо в предположении аксиальной симметричности поля скорости вязкой жидкости \mathbf{u} и магнитного поля \mathbf{B} [51]. Тогда пространственная структура среднего поля $\bar{\mathbf{u}}$ простая и можно ограничиться одномодовыми приближениями для тороидаль-

ной и полоидальной компонент этих полей, которые можно описать скалярными функциями:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= u^T \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + u^P \mathbf{v}_2(\mathbf{r}), \\ \mathbf{B} &= B^T \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + B^P \mathbf{B}_2(\mathbf{r}),\end{aligned}\tag{1.26}$$

где компоненты поля скорости и магнитного поля считаются независимыми от времени и составляющая $\mathbf{B}_1^P(\mathbf{r})$ является дипольной

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{v}_1^T(\mathbf{r}), \\ \mathbf{v}_2(\mathbf{r}) &= \mathbf{v}_2^P(\mathbf{r}), \\ \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_2^T(\mathbf{r}), \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_1^P(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{1.27}$$

Полагаем, что среднее течение $\bar{\mathbf{u}}$ носит характер дифференциального вращения [2, 53, 52, 1]. С учетом сделанных предположений нижеприведённую систему МГД-уравнений крупномасштабного динамо

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) &= \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho \mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} = \nabla \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right.\tag{1.28}$$

где \mathbf{v} – поле скорости вязкой жидкости, \mathbf{B} – магнитное поле, \mathbf{f} – внешняя сила (источник полоидальной скорости), P – давление, \mathbf{r} – радиус-вектор, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, ν_m – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, можно, используя метод Галёркина [63], записать в маломодовом приближении

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du^T}{dt} &= Re_m B_{112} u^T u^P - \frac{Re_m}{Re} \mu_1 u^T + \frac{Re_m}{E \cdot Re} P_{12} u^P + L_{112} B^T B^P, \\ \frac{du^P}{dt} &= Re_m B_{211} (u^T)^2 - \frac{Re_m}{Re} \mu_2 u^P + \frac{Re_m}{E \cdot Re} P_{21} u^T + L_{211} (B^T)^2 + L_{222} (B^P)^2 + f, \\ \frac{dB^T}{dt} &= Re_m (W_{112} u^T B^P + W_{121} u^P B^T) + R_\alpha W_{12}^\alpha B^P - \nu_1 B^T, \\ \frac{dB^P}{dt} &= Re_m W_{222} u^P B^P + R_\alpha W_{21}^\alpha B^T - \nu_2 B^P, \end{aligned} \right.\tag{1.29}$$

где u^T – тороидальная мода скорости, u^P – полоидальная мода скорости, B^T – тороидальная мода магнитного поля, B^P – полоидальная мода магнитного поля, Re – число Рейнольдса, Re_m – магнитное число Рейнольдса, R_α – амплитуда α -эффекта, E – число Экмана, f – внешняя сила, μ_i – коэффициент вязкой диссипации, ν_i – коэффициент магнитной диссипации. Коэффициенты $B_{ijk}, W_{ijk}, W_{ij}, P_{12}$ – это объёмные интегралы от рассматриваемых полей, значения которых для принятой модели принимаются равными:

$$B_{112} = 0.365, B_{211} = -0.365, B_{222} = -0.170, P_{12} = 0.193, L_{112} = 0.487, L_{211} = 0.211, W_{112} = -0.487, W_{121} = -0.211, W_{222} = 0.170, \nu_1 = 33.218, \nu_2 = 9.870, \mu_1 = 28.159, \mu_2 = 86.573.$$

В зависимости от определения алгебраической функции для задания амплитуды α -эффекта коэффициенты W_{ij}^α принимают следующие значения:

- а) если зависимость постоянная $\alpha(r) = 1$: $W_{12}^\alpha = 1.874, W_{21}^\alpha = 1.037$,
- б) если зависимость линейная $\alpha(r) = r$: $W_{12}^\alpha = 1.073, W_{21}^\alpha = 0.788$,
- в) если зависимость от радиуса синусоидальная $\alpha(r) = \sin r$: $W_{12}^\alpha = -0.506, W_{21}^\alpha = 0.117$.

Основной целью работы в рамках принятой модели является получение области значений параметров системы (1.29), при которых могут возникать инверсии в магнитном поле при относительном постоянстве поля скорости и решений системы (1.29), при которых возникают инверсии с заданными свойствами, а именно, перебросы в поле скоростей должны возникать значительно реже, чем в магнитном поле. Для реализации цели были разработаны программы.

1.4.1 Программа для вычисления и визуализации некоторых параметров (начальных условий) в системе магнитогидродинамического типа, для которой возможна осциллирующая генерация магнитного поля «Magnetic field parameters»

Программа предназначена для вычисления и визуализации области неизвестных значений параметров системы МГД-типа (1.29): $Re_m u^P, Re_m u^T, R_a$. Параметры определяют начальные условия в системе МГД-типа, при которых возможна осциллирующая генерация компонент магнитного поля. При зафиксированных значениях тороидальной u^T и полоидальной u^P мод поля скорости вязкой жидкости определяются условия, при которых возможно получение устойчивого по Ляпунову осциллирующего решения для дифференциальных уравнений, связывающих тороидальную и полоидальную моды магнитного поля.

Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

- проверку условий устойчивости решения дифференциальных уравнений по Ляпунову;
- вычисление неизвестных параметров $Re_m u^P, Re_m u^T, R_a$, определяющих начальные условия для рассматриваемой системы МГД-типа;
- визуализацию области в пространстве параметров, при которых возможна осциллирующая генерация магнитного поля.

Выходными данными являются текстовый файл, содержащий найденные параметры системы, и графики с проекциями найденной области в пространстве параметров. Программа выполнена в виде отдельно выполняемого модуля и не требует специального ПО.

Рассмотрим Подпрограмму 1 – вычисления параметров в системе магнитогидродинамического типа, для которой возможна осциллирующая генерация магнитного поля.

Рассмотрим систему из двух последних уравнений системы (1.29)

$$\begin{cases} \frac{dB^T}{dt} = Re_m(W_{112}u^T B^P + W_{121}u^P B^T) + R_\alpha W_{12}^\alpha B^P - \nu_1 B^T, \\ \frac{dB^P}{dt} = Re_m W_{222}u^P B^P + R_\alpha W_{21}^\alpha B^T - \nu_2 B^P, \end{cases} \quad (1.30)$$

предполагая значения мод скорости постоянными. Параметрами этой системы являются R_α и произведения $Re_m u^P$, $Re_m u^T$. Поиск значений этих параметров ограничим областями их возможного изменения в логарифмическом масштабе:

$$\lg R_\alpha \in [-1, 3], \lg(Re_m u^P) \in [3, 7], \lg(Re_m u^T) \in [2, 8].$$

Осциллирующее решение системы (1.30) может быть получено лишь при условии отрицательности дискриминанта её характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} Re_m W_{121} u^P - \nu_1 & Re_m W_{112} u^T + R_\alpha W_{12}^\alpha \\ R_\alpha W_{21}^\alpha & Re_m W_{222} u^P - \nu_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.31)$$

и получаемое решение будет устойчивым по Ляпунову, если положительны коэффициенты характеристического уравнения, записанного в общем виде $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ [64]:

$$\begin{aligned} p &= 43.088 + 0.041 Re_m u^P, \\ q &= -0.035870 Re_m (u^P)^2 - 3.564490 Re_m u^P + 0.487 W_{21} R_\alpha Re_m u^T + 327.861660 - \\ &\quad - W_{21} R_\alpha^2 W_{12}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

В Подпрограмме 1 осуществляется проверка условий и вывод удовлетворяющих им параметров в текстовый файл $N[i][j].txt$, где название сформировано следующим образом: название функциональной зависимости амплитуды α -эффекта от радиуса – синусоидальная ($N = sin$), линейная ($N = r$) или постоянная ($N = const$), индексы i и j принимают значения 0 или 1 (0 - соответствует отрицательному, а 1 - положительному значению мод поля скорости вязкой жидкости u^P и u^T). Параметры записываются в файлы в логарифмическом масштабе $\log_{10} R_\alpha$, $\log_{10}((-1)^{i-1} Re_m u^P)$, $\log_{10}((-1)^{i-1} Re_m u^T)$.

Теперь рассмотрим Подпрограмму 2 – визуализации области устойчивого решения в системах магнитогидродинамического типа в пространстве параметров

Подпрограмма 2 считывает данные из файлов, сформированных Подпрограммой 1, записывает в список

$$s1 := [seq([Sp[i,r][j][2], Sp[i,r][j][3], Sp[i,r][j][1]], j = 1 .. nops(Sp[i,r]))]:$$

и производит построение проекций областей в пространстве параметров. Результаты некоторых вычислений показаны на рисунке 1.13.

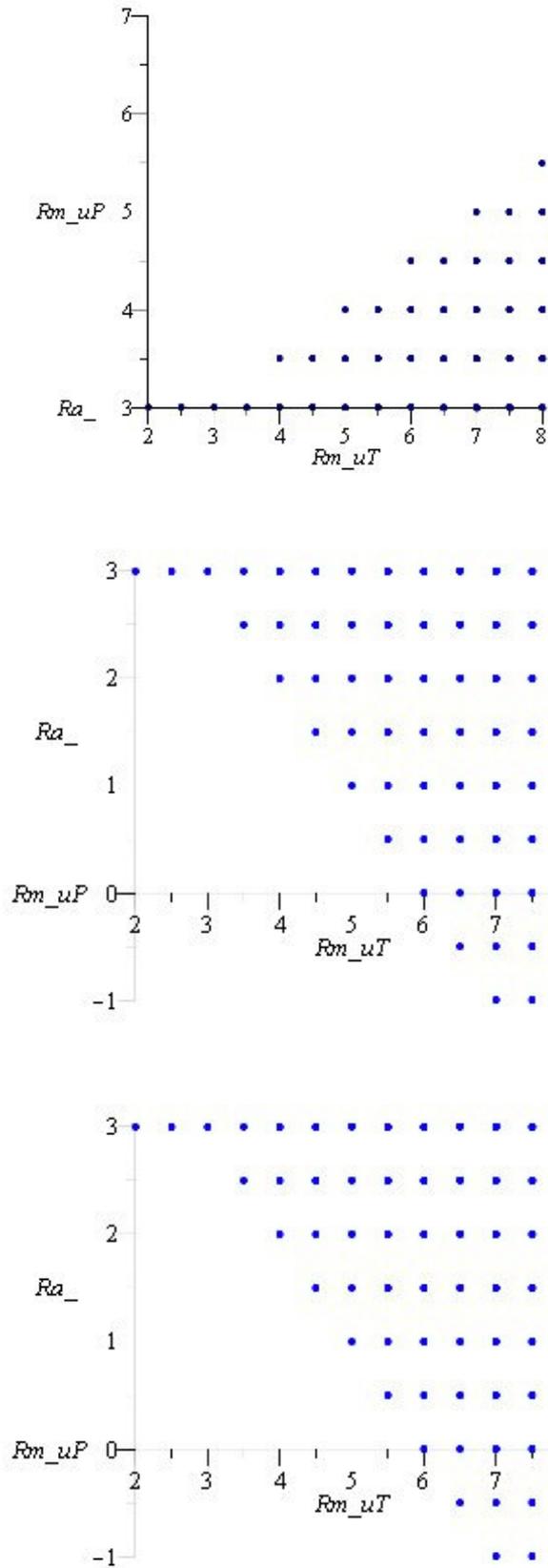


Рисунок 1.13 — Проекция области осциллирующего решения системы (1.30) в пространстве параметров Re_α , $Re_m u^P$, $Re_m u^T$.

1.4.2 Программа для исследования перебросов в системах магнитогидродинамического типа «Phase path»

Программа предназначена для исследования перебросов (инверсий) в системах МГД-типа (1.29). Генерация полей осуществляется за счёт Ω - и α -эффектов. Величины эффектов определяются путём случайного выбора параметров Re_m – магнитного числа Рейнольдса и R_a – амплитуды α -эффекта в пределах интервалов их возможных значений. Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

- вычисление начальных значений мод поля скорости с использованием заданных случайным образом значений параметров Ω - и α -эффектов, при которых возможны устойчивые осцилляции магнитного поля;
- численное решение МГД-системы неявным методом Эйлера-Коши;
- визуализация фазовых траекторий мод, визуализация перебросов (инверсий) в поле скорости и магнитном поле.

Выходными данными являются текстовые файлы, содержащие решение системы уравнений МГД-типа, и графические файлы, содержащие фазовые траектории мод поля скорости и магнитного поля и графики инверсий.

Рассмотрим Подпрограмму 1 – задания параметров для решения системы МГД типа

Данный модуль предназначен для получения параметров необходимых для дальнейшего исследования МГД-системы (1.29). В Подпрограмме 1 осуществляется автоматизированное считывание из текстовых файлов, сформированных программой «Magnetic field parameters», параметров $a[0][j] = R_a$ и $a[1][j] = Re_m u^P$, $a[2][j] = Re_m u^T$, которые в дальнейшем используются для вычисления начальных значений системы (1.29):

В подпрограмме случайным образом задаются значения параметров Re – число Рейнольдса ($Re = 10 - 10^4$), Re_m – магнитное число Рейнольдса ($Re_m = 10^4 - 10^{10}$), E – число Экмана ($E = 10^{-10} - 10^{-5}$), в границах изменения их возможных значений. Шаг итерации выбирается так, чтобы он был значительно меньше времени затухания полей. Поэтому для определения шага итерации h вычисляются характерные времена затухания тороидальной и полоидальной мод рассматриваемых полей, из которых выбирается минимальное значение и умножается на коэффициент порядка 10^{-6} . При необходимости значение шага h можно уменьшить.

Рассмотрим Подпрограмму 2 – численного решения системы гидродинамического типа в маломодовом приближении неявным методом Эйлера-Коши

Данный модуль осуществляет создание списка файлов для записи найденных численных решений системы (1.29) при различных входных параметрах. Для каждой считанной из текстового файла Подпрограммой 1 строки k , содержащей параметры $a[0][j] = R_a$, $a[1][j] = Re_m u^P$, $a[2][j] = Re_m u^T$, при которых возможно возникновение осцилляций в магнитном поле,

автоматически создаётся текстовый файл для записи решения исследуемой системы дифференциальных уравнений (1.29) и её параметров.

Подпрограмма 2 осуществляет решение системы (1.29) по неявной схеме. Начальные значения мод скорости вычисляются с помощью считанных Подпрограммой 1 параметров $a[1][j] = Re_m u^P$, $a[2][j] = Re_m u^T$, при которых возможно возникновение осцилляций в магнитном поле, а для компонент магнитного поля выбираем точку, близкую к нулевой точке покоя так, чтобы выполнялось равенство $(B_0^T)^2 + (B_0^P)^2 = 1$.

На каждом шаге h решения системы (1.29) Подпрограмма 2 выполняет запись в файл всех введённых параметров и полученное решение системы: время i , значения полоидальной и тороидальной мод скорости, полоидальной и тороидальной мод магнитного поля.

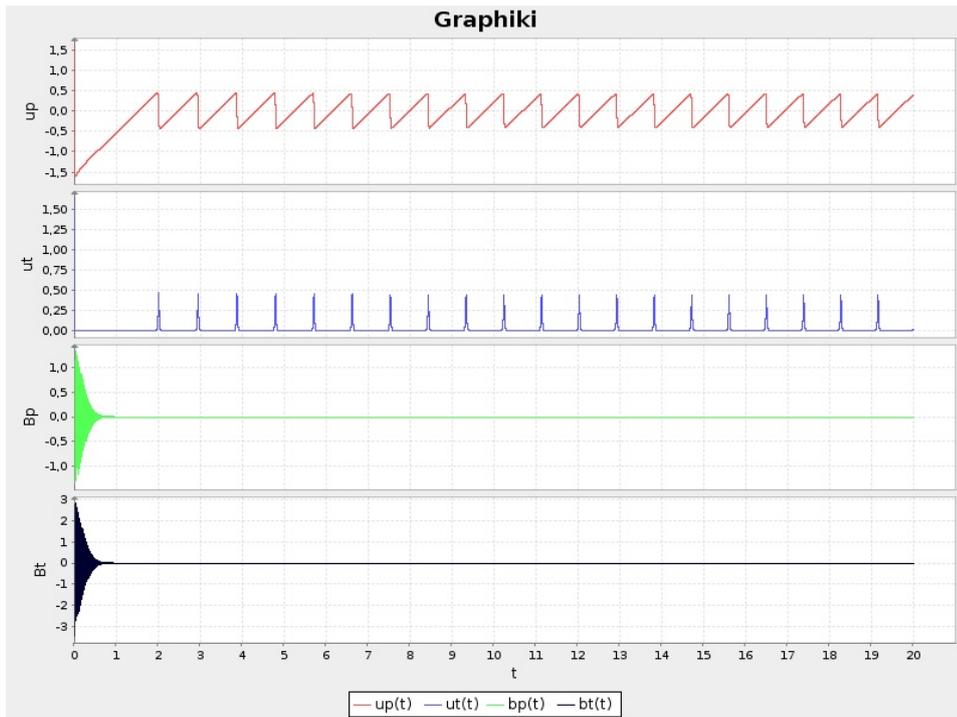
Рассмотрим Подпрограмму 3 – визуализации фазовых траекторий и схематического изображения перебросов на оси времени

Решения системы (1.29), вычисленные в Подпрограмме 2, записываются в массивы, после чего каждая точка помещается на график.

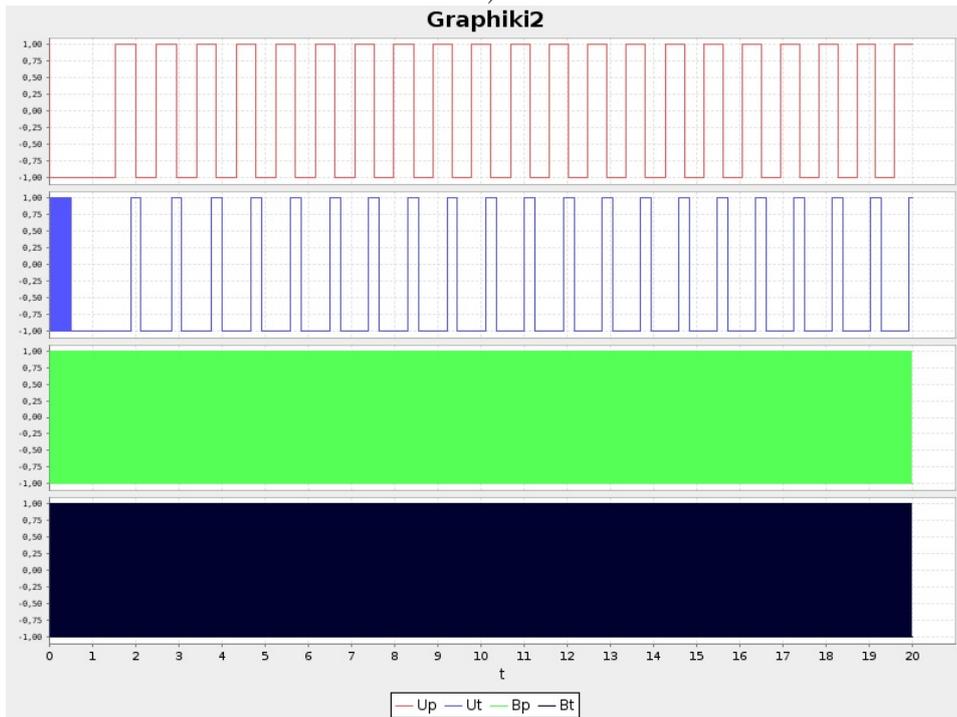
Для построения графиков перебросов была написана функция. На каждом шаге i определяется значение p и отображается на графике:

- а) если значение $p > 0$, то на графике отмечаем точку 1, иначе (-1);
- б) если на i -ом шаге значение $p > 0$, а на $(i + h)$ -ом шаге $p < 0$, то на $(i + h)$ -ом шаге ставим точки 1 и (-1);
- в) если значение на i -ом шаге $p < 0$, а на $(i + h)$ -ом шаге $p > 0$, то на $(i + h)$ -ом шаге ставим точки (-1) и 1.

Построенные точки соединяются отрезками прямых. Применение этой функции позволяет визуализировать инверсии, которые могут быть незаметны на графиках, построенных для численного решения системы (1.29). Результаты некоторых вычислений показаны на рисунке 1.14.



a.)



б.)

Рисунок 1.14 — Изменения тороидальной и полоидальной мод поля скорости и магнитного поля при задании амплитуды α -эффекта нелинейной зависимостью $\alpha(r) = \sin r$.

1.4.3 Выводы по подразделу

В рамках принятой модели $\alpha\Omega$ -динамо в предположении аксиальной симметрии поля скорости вязкой жидкости \mathbf{u} и магнитного поля \mathbf{B} [51] разработаны программы, позволя-

ющие вычислять значения параметров системы (1.29), при которых могут возникать инверсии в магнитном поле при относительном постоянстве поля скорости, и при найденных значениях находить численное решение рассматриваемой системы МГД-типа, а также осуществлять визуализацию найденных областей, инверсий и решений.

1.5 Инверсии магнитного поля в динамической системе со стохастическими $\alpha\Omega$ -генераторами

При сильном дифференциальном вращении генерацию магнитного поля описывают с помощью $\alpha\Omega$ -динамо [51]. Свойством динамо систем является наличие инверсии без существенной перестройки движения проводящей среды. В реальных системах такие инверсии носят как регулярный характер, так и хаотический [3]. В данной работе инверсии магнитного поля моделируются в простой динамической модели $\alpha\Omega$ -динамо с флуктуирующими интенсивностями α - и Ω -генераторов [65]. Считаем, что источниками этих флуктуаций является результат синхронизации высших отброшенных мод поля скорости и магнитного поля [9].

1.5.1 Уравнения и параметры модели

В модели $\alpha\Omega$ -динамо предполагаем аксиальную симметричность поля скорости \mathbf{v} и магнитного поля \mathbf{B} в сферической оболочке вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью Ω . Считаем, что поле скорости вязкой жидкости \mathbf{v} нулевое на внутренней $r = r_1$ и внешней $r = r_2$ сферических границах оболочки (граничные условия прилипания), магнитная проницаемость внутреннего и внешнего ядра одинаковы, среда вне ядра ($r > r_2$) не проводящая (принимаются вакуумные граничные условия на внешней границе и условия ограниченности в центре Земли). Полагаем, что среднее течение $\bar{\mathbf{v}}$ носит характер дифференциального вращения, которому соответствуют моды $\mathbf{v}_{k,1,0}^T$ из линейной оболочки $\{\mathbf{v}_{k_1,1,0}^T, \mathbf{v}_{k_2,2,0}^P, \mathbf{v}_{k_3,3,0}^T, \mathbf{v}_{k_4,4,0}^P, \dots\}$ инвариантной относительно кориолисова сноса. Любая такая мода порождает остальные по цепочке [22]. В самом простом случае скорость хорошо аппроксимируется следующей комбинацией:

$$\mathbf{v} = u(t)\mathbf{v}_0 = u(t)(\alpha_1\mathbf{v}_{0,1,0}^T + \alpha_2\mathbf{v}_{0,2,0}^P + \alpha_3\mathbf{v}_{0,3,0}^T + \alpha_{11}\mathbf{v}_{1,1,0}^T + \alpha_{13}\mathbf{v}_{1,3,0}^T), \quad (1.33)$$

где \mathbf{v}_0 – мода Пуанкаре, $|\mathbf{v}_0| = 1$, $u(t)$ – амплитуда скорости, компоненты поля скорости считаются независимыми от времени. Магнитное поле представляется минимальным количеством низших собственных мод $\mathbf{B}_{0,1,0}^P, \mathbf{B}_{0,2,0}^T, \mathbf{B}_{0,3,0}^P$, достаточных для получения осциллирующего динамо [65]

$$\mathbf{B} = B_2^T(t)\mathbf{B}_{0,2,0}^T(\mathbf{r}) + B_1^P(t)\mathbf{B}_{0,1,0}^P(\mathbf{r}) + B_3^P(t)\mathbf{B}_{0,3,0}^P(\mathbf{r}), \quad (1.34)$$

где компоненты магнитного поля считаются независимыми от времени и составляющая $\mathbf{B}_{0,1,0}^P(\mathbf{r})$ является дипольной.

Физические параметры жидкости считаем неизменными, турбулентность в ядре изотропной и используем скалярную параметризацию α -эффекта в виде функции $\alpha(r, \theta) = \alpha(r) \cos \theta$,

где $\max|\alpha(r, \theta)| = 1$. Мы использовали три варианта вида радиальной части α -эффекта $\alpha(r)$: $\alpha(r) = 1$, $\alpha(r) = r$, $\alpha(r) = -\sin(\pi(r - r_1))$.

Подставим разложения (1.33) и (1.34) в магнитогидродинамическую систему с введённым механизмом алгебраического подавления α -эффекта и осцилляции:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + Re_m(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= P_m\Delta\mathbf{v} - \nabla P - E^{-1}P_m(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + (1 + \zeta(t))\mathbf{f}_{out} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= Re_m[\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] + \Delta\mathbf{B} + R_\alpha \frac{1 + \xi(t)}{1 + |\mathbf{B}|} [\nabla \times (\alpha(r, \theta)\mathbf{B})], \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\mathbf{v}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) &= \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{1.35}$$

где $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ – стохастические процессы с нулевым средним. Эти процессы моделируют спонтанно возникающее и исчезающее когерентное влияние отброшенных высших мод поля скорости и магнитного поля. Структура процессов определялась также, как в работе [65], а именно, на оси времени задаётся случайная последовательность точек $0 < \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_k < \theta_k < \dots$. Считаем, что k -ая по счету когерентная структура образуется в момент τ_k и разрушается в момент θ_k . Тогда $T_k^{est} = \tau_k - \theta_{k-1}$ – время ожидания формирования очередной структуры, а $T_k = \theta_k - \tau_k$ – время ее существования. В течение времени ожидания T_k^{est} процессы $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ – нулевые, а в течение времени существования $\zeta(t) = \zeta_k$ и $\xi(t) = \xi_k$, где ζ_k и ξ_k – независимые случайные величины с нулевым средним, равномерно распределённые на отрезках $[-0.01; 0.01]$ и $[-0.1; 0.1]$, соответственно. При моделировании использовался показательный закон распределения для времен ожидания T_k^{est} и существования T_k , причем сами эти величины были независимыми. Средние значения $\langle T_k^{est} \rangle = 5$ и $\langle T_k \rangle = 30$, т. е. характерное время существования когерентных структур значительно меньше времени их ожидания.

Применим к системе (1.35) метод Галёркина и получим систему следующего вида:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -P_m u(t) \sum_k \alpha_k^2 \lambda_k + (1 + \zeta(t)) f_{out} + \sum_{i,j,k} \alpha_i L_{ijk} B_j B_k, \\
\frac{\partial B_i}{\partial t} &= Re_m u(t) \sum_k \alpha_j W_{ijk} B_k - \mu_i B_i + R_\alpha \frac{1 + \xi(t)}{1 + \sum_k B_k} \sum_k W_{ik}^\alpha B_k,
\end{aligned} \tag{1.36}$$

На рисунке 1.15 изображены области осциллирующего и неосциллирующего динамо для используемых в работе видов задания α -эффекта. Выбирая различные значения (Re_m, R_α) из окрестности точки бифуркации [65], получаем различные режимы динамо.

1.5.2 Результаты численного моделирования

Вычислительные эксперименты с моделью (1.36) проводились в окрестности точки бифуркации (Re_m, R_α) , где $Re_m \in [10; 1000]$ и $R_\alpha \in [1; 50]$ для принятых начальных условий $u(0) = 1$, $B_2^T = 0$, $B_1^P = 0$, $B_3^T = 0$. Первоначально случайные величины ζ_k и ξ_k исключили из

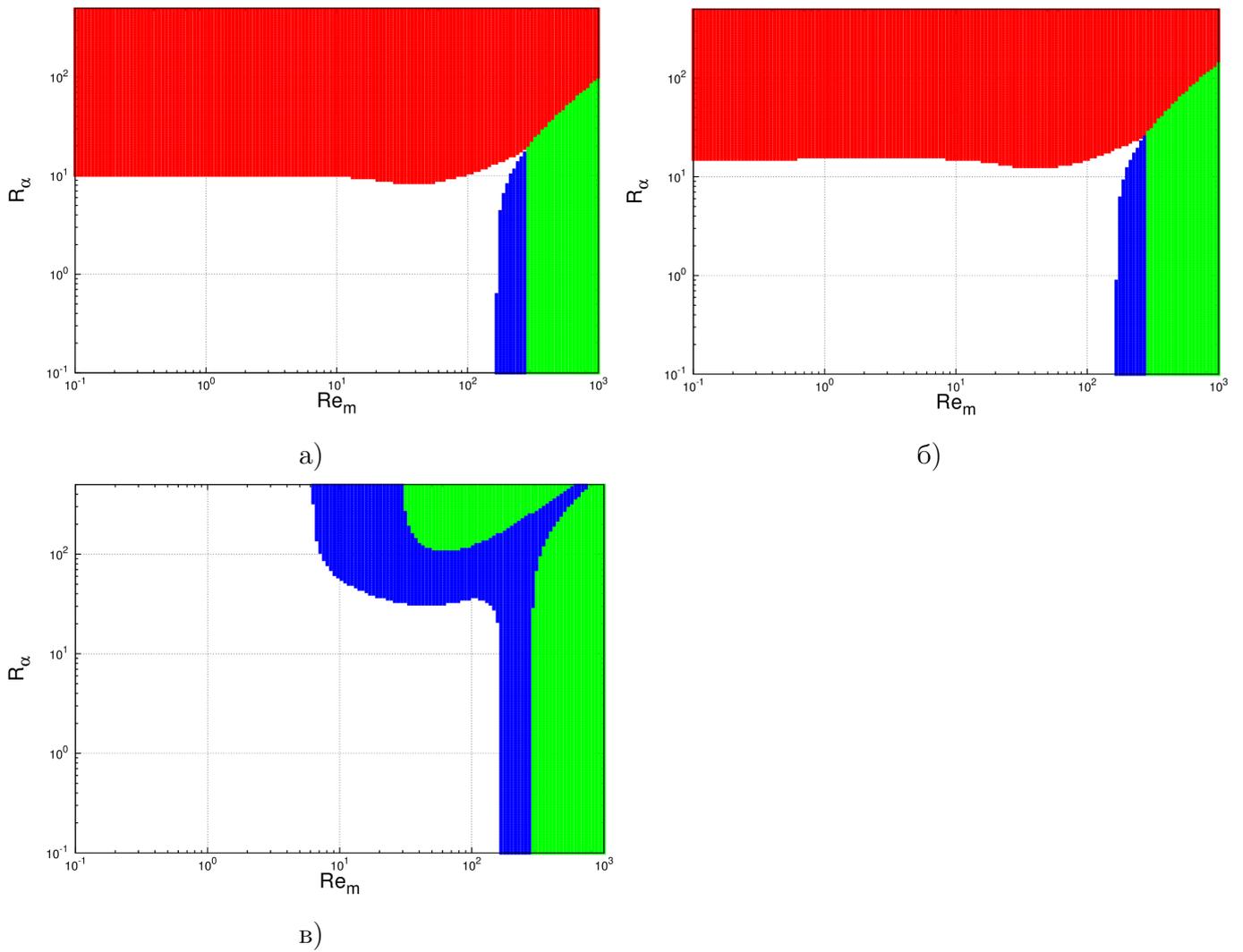
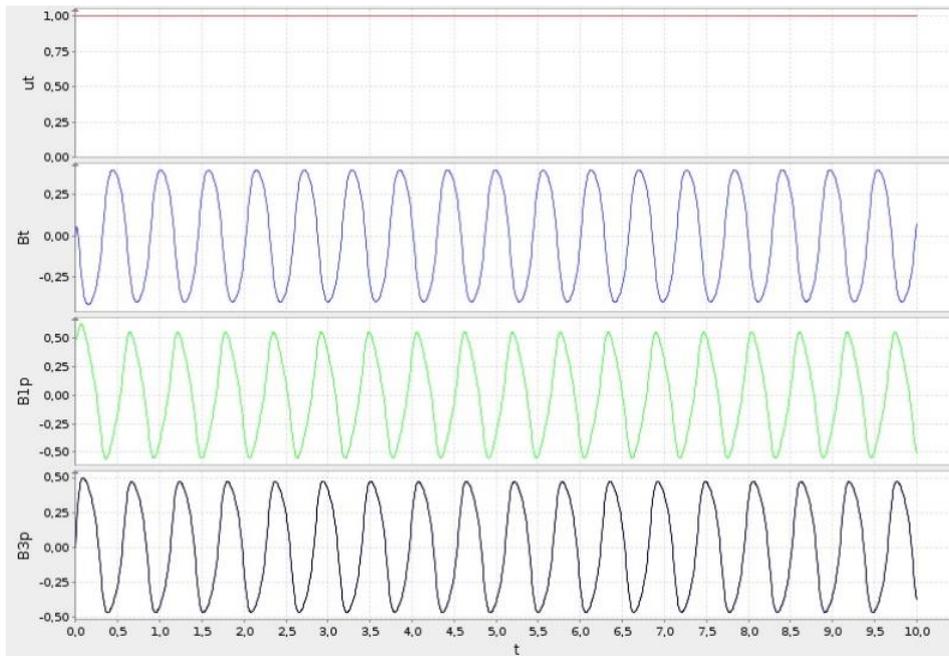


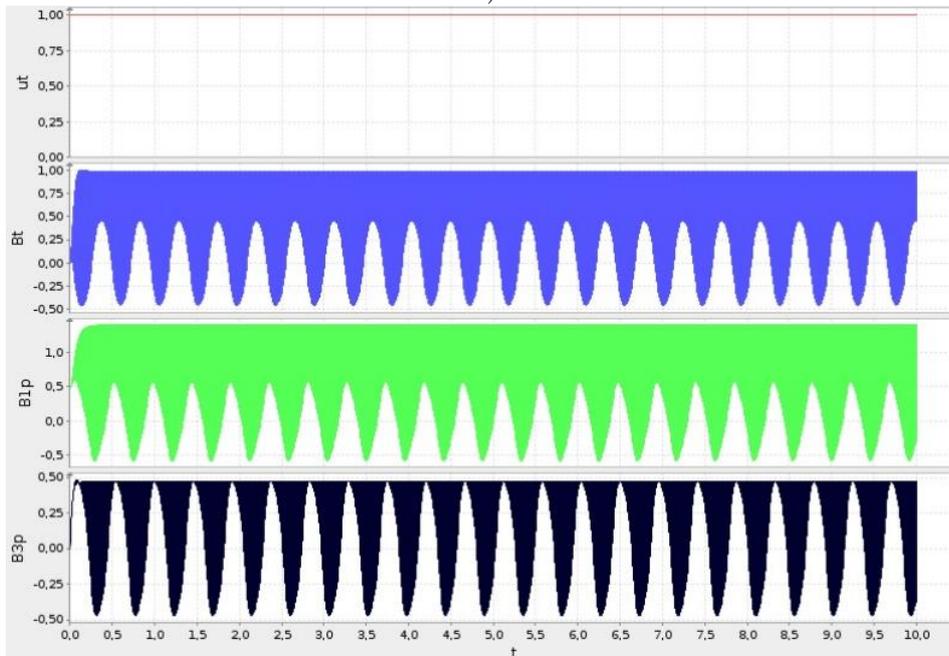
Рисунок 1.15 — Характер генерации магнитного поля в зависимости от параметров R_α (турбулентный генератор) и Re_m (крупномасштабный генератор). α -эффект задаётся функциями а) $\alpha(r) = 1$, б) $\alpha(r) = r$, в) $\alpha(r) = -\sin(\pi(r - r_1))$. Белая область – магнитное поле затухает без осцилляций, зелёная – генерация поля с нарастающими осцилляциями, синяя – с затухающими осцилляциями, красная – генерация поля без осцилляций.

модели, т. е. обнулили. В результате получали следующие режимы динамо: квазипериодические, затухание поля, отсутствие перебросов. На рисунке 1.16 приведены примеры двух реализаций с квазипериодическим режимом осцилляций для двух собственных значений моды Пуанкаре при $Re_m = 100$, $R_\alpha = 20$. Аналогичные режимы получены при изменении параметров в следующих границах $Re_m \in [80; 100]$, $R_\alpha \in [20, 50]$. По вертикальной оси отложены безразмерные амплитуды компонент.

Увеличение собственного значения моды Пуанкаре приводит к увеличению частоты осцилляций в магнитном поле. Отметим, что для данного случая характерно появление инверсий магнитного поля на фоне неизменной или слабо меняющейся амплитуды поля скорости. Тогда в рассматриваемой модели можно считать изменение поля скорости равным нулю в пер-



а)

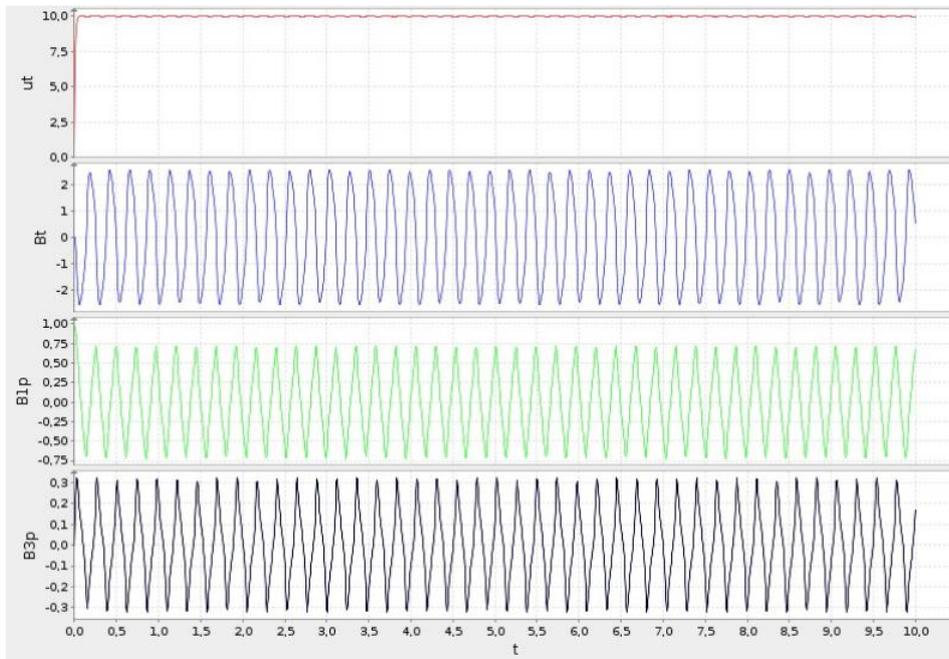


б)

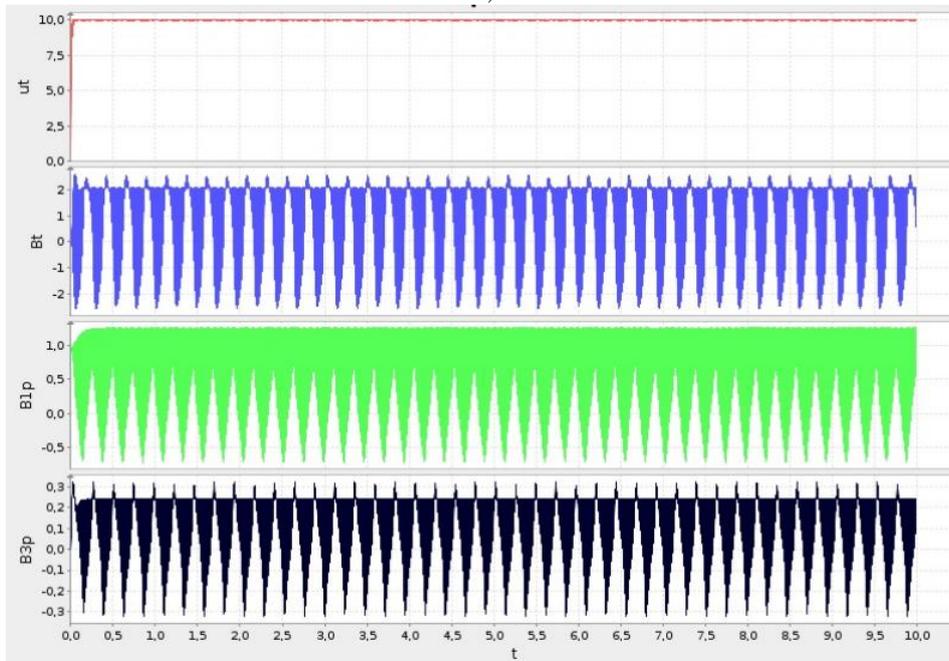
Рисунок 1.16 — Режимы изменения амплитуд моды Пуанкаре и магнитных мод при $Re_m = 100$, $R_\alpha = 20$ для собственного значения моды Пуанкаре: а) $\lambda = 159$ б) $\lambda = 356$.

вом уравнении системы (1.36), выразить $u(t)$ через амплитуды магнитных мод B_i и перейти к рассмотрению трёхмодовой модели, порождающей инверсии в магнитном поле.

На следующем этапе в модель были включены стохастические процессы $\zeta(t)$ и $\xi(t)$, моделирующие спонтанно возникающее и исчезающее когерентное влияние отброшенных высших мод поля скорости и магнитного поля. Варьирование масштабирующего множителя для данных процессов приводит к появлению слабых флуктуаций на фоне основного режима (рисунок. 1.17).



а)



б)

Рисунок 1.17 — Режимы изменения амплитуд моды Пуанкаре и магнитных мод при $Re_m = 100$, $R_\alpha = 20$ для собственного значения моды Пуанкаре: а) $\lambda = 159$ б) $\lambda = 356$.

1.5.3 Выводы по подразделу

В предложенной простой модели динамо удаётся воспроизвести различные режимы динамо, которые наблюдаются в реальных динамо-системах. При значениях параметров $Re_m \in [80; 100]$, $R_\alpha \in [20, 50]$ четырёхмодовая модель может быть сведена к трёхмодовой модели, генерирующей инверсии в магнитном поле. Достоинством предложенной модели является то, что источником регулярных инверсий служит её внутренняя динамика, а нарушение этой циклич-

ности, сбои в работе динамо-машины, выход на режим хаотических инверсий – обусловлены перестройкой структуры турбулентности.

Основные результаты подраздела опубликованы в работе [65].

1.6 Использование компьютерных систем символьных вычислений для автоматизации составления маломодовых моделей геофизической гидродинамики

Многие задачи геофизической гидродинамики сводятся к решению уравнений Навье-Стокса во вращающейся координатной системе для области со сферической симметрией [66]. Эта область обычно является шаром или сферической оболочкой. В наиболее общем случае можно говорить о сферической оболочке (внутренний радиус равен нулю в случае шара). Исследование звездного и планетарного динамо предполагает изучение очень сложной системы, описывающей МГЛ-конвекцию. Для подобных систем точные решения неизвестны и приходится использовать различные численные методы и упрощенные модели.

Весьма популярными являются спектральные методы, когда решения нестационарных задач математической физики ищутся в виде линейных комбинаций стационарных базисных полей (мод) с зависящими от времени коэффициентами (амплитудами). Для этих амплитуд, используя подходящий метод взвешенных невязок, составляют динамическую систему. Эта система, вместе с набором базисных мод, является образует модель пространственно распределенной гидродинамической или магнитогидродинамической системы [67]. Применение такой техники моделирования содержит две вычислительные задачи: во-первых, надо составить саму динамическую систему для амплитуд, во-вторых ее надо решить. Сама система является квадратично нелинейной с постоянными коэффициентами, которые определяются управляющими параметрами модели и набором отобранных мод.

Следует отметить, что для построения системы может потребоваться гораздо больше вычислительных усилий, чем ее последующее решение. Это связано с тем, что вычисление коэффициентов модели сводится к вычислению объемных интегралов по сферической оболочке из различных мультипликативных комбинаций самих мод и / или оператора ∇ . Количество этих коэффициентов увеличивается пропорционально третьей степени числа используемых мод. Даже для очень грубых моделей, включающих ~ 10 мод, количество коэффициентов достигает тысячи.

Однако, большинство коэффициентов системы равны нулю. Причина в том, что сферическая симметрия области определяет представление мод в широтно-долготном направлении с помощью сферических гармоник. Ортогональность сферических гармоник и некоторых связанных с ними функций на поверхности сферы, приводит к обнулению большого числа коэффициентов. Иногда эту ортогональность можно показать в общем виде, иногда она завуалирована, и проявляется только в процессе интегрирования, когда сначала вычисляется интеграл по поверхности сферы, а затем по радиусу.

Величина каждого коэффициента является мерой взаимодействия соответствующих мод в процессе, описываемом соответствующим членом уравнения. По этой причине точное равенство нулю некоторых коэффициентов, установленное аналитическим интегрированием, может нести значительную физическую информацию.

Для автоматизации процесса составления описанных динамических систем удобны компьютерные системы аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры). В любой такой системе мы можем программно реализовать следующую схему расчета:

- получение аналитических выражений для каждой моды;
- вычисление в аналитической форме подынтегральных выражений, являющихся некоторыми мультипликативными комбинациями мод и оператора ∇ ;
- аналитическое интегрирование по поверхности сферы (это интегрирование дает нуль или некоторое выражение, зависящее от радиальной переменной);
- если интеграл по поверхности сферы отличен от нуля, выполняется аналитическое или численное интегрирование по радиусу.

Понятно, что третий и четвертый пункты могут выполняться стандартными средствами любой системы аналитических вычислений, поскольку любая такая система позволяет аналитически и численно интегрировать. Для реализации первого и второго пунктов необходимо вычислять операции векторного анализа в аналитической форме в сферических координатах. Для этого удобно использовать системы компьютерной алгебры, содержащие пакеты команд векторного анализа. Например, мощный пакет таких вычислений содержит система Maple VectorCalculus [68, 69, 70]. Однако, необходимый минимальный набор операций векторного анализа легко запрограммировать в любой системе.

Теперь, мы рассмотрим описанный набор задач и их решение более подробно.

1.6.1 Исходные уравнения и базисные системы

Движение несжимаемой жидкости во вращающейся сферической оболочке Ω , типичной для задач геофизической гидродинамики, описывается уравнениями Навье-Стокса в безразмерной форме [24]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{v} - \nabla p - \text{Ro}^{-1} \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1.37)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0,$$

где \mathbf{v} – поле скорости, p – эффективное давление (включающее центростремительный член), \mathbf{f} – массовая плотность внешних сил (заданное поле), \mathbf{e}_z – орт оси вращения, Re – число Рейнольдса, и Ro – число Россби.

В дальнейшем мы всегда будем использовать стандартно связанные декартову (x, y, z) и сферическую (r, θ, φ) системы координат, начало которых помещено в центр оболочки Ω , а ось z направлена вдоль оси вращения.

Система (1.37) замыкается граничными условиями для полей \mathbf{v} и p на внутренних $r = r_i$ и внешних границах $r = 1$ оболочки. В случае $r_i = 0$ внутренние условия сводятся к требованию конечности полей в центре. Конкретная форма граничных условий пока не играет роли, мы будем предполагать только, что они линейны и однородны.

В задачах планетарного и звездного динамо система (1.37) дополняется уравнениями для магнитного поля [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \text{Rm}^{-1} \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{1.38}$$

где Rm – магнитное число Рейнольдса и правая часть первого из уравнений (1.37) дополняется лоренцевым членом $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$. Для магнитного поля также ставятся линейные однородные граничные условия.

Поскольку поля скорости и магнитной индукции имеют нулевую дивергенцию, их можно представить в виде суммы тороидальных и полоидальных компонент [66], а неоднородность полей в (θ, φ) - направлении можно разложить на сферические гармоники. Тогда тороидальные базисные моды для скорости и магнитной индукции будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{knm}^T &= \nabla \times (u_{knm}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}), \\ \mathbf{B}_{knm}^T &= \nabla \times (b_{knm}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}),\end{aligned}\tag{1.39}$$

а полоидальные базисные моды примут вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{knm}^P &= \nabla \times [\nabla \times (u_{knm}^P(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r})], \\ \mathbf{B}_{knm}^P &= \nabla \times [\nabla \times (b_{knm}^P(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r})].\end{aligned}\tag{1.40}$$

В этих формулах $Y_n^m(\theta, \varphi)$ - сферические гармоники, \mathbf{r} - радиус-вектор, индекс k соответствует квантованию пространственного спектра в r - направлении и конкретный вид радиальных функций $u_{knm}^T, b_{knm}^T, u_{knm}^P, b_{knm}^P$ может быть любой. Например, они могут быть выбраны так, что моды (1.39), (1.40) являются модами свободной диссипации жидкости и магнитного поля в оболочке. Кроме того, форма радиальных функций зависит от конкретных граничных условий. Будем далее предполагать, что эти функции известны.

Решения задачи (1.37), (1.38) строятся в виде линейных комбинаций мод (1.39), (1.40) с зависящими от времени амплитудами. Соленоидальная природа полей скорости и магнитной индукции, а также граничные условия будут выполняться автоматически. Мы также исключаем поле давления из рассмотрения. Также предположим, что в поле внешних сил временные и пространственные переменные разделены, то есть $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \xi(t) \mathbf{f}_0()$.

Итак, мы будем использовать разложения

$$\mathbf{v} = \sum_i x_i(t) \mathbf{v}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B} = \sum_i y_i(t) \mathbf{B}_i(\mathbf{r}),\tag{1.41}$$

где $\mathbf{v}_i(\mathbf{r})$ и $\mathbf{B}_i(\mathbf{r})$ – любые из полей (1.39), (1.40), а мультииндекс $i = (\varepsilon, k, n, m)$, $\varepsilon \in \{T, P\}$.

1.6.2 Уравнения модели

Мы дополняем МГД-систему (1.37), (1.38) лоренцевым членом и используем разложения (1.41). Чтобы получить модельные уравнения в соответствии с методами взвешенных невязок, необходимо умножить эти уравнения на некоторые весовые функции и проинтегрировать по Ω [67]. Рассмотрим это на примере метода Галеркина, когда в качестве весовых функций используются базисные моды.

Сначала рассмотрим вопрос об исключении поля давления. В самом общем случае достаточно просто применить операцию ротора к обеим частям уравнения Навье–Стокса. Ясно, что это даст не просто переход к уравнению-следствию, но это будет эквивалентное преобразование. Однако в случае использования нулевых граничных условий для поля скоростей давление исчезает в результате самой процедуры Галеркина. Действительно, умножая уравнение Навье–Стокса на моду $\mathbf{v}_l(\mathbf{r})$ и интегрируя, получим для члена с давлением (с учетом соленоидальной природы скорости и теоремы Остроградского–Гаусса)

$$\int_{\Omega} (\nabla p) \mathbf{v}_l dV = \int_{\Omega} \nabla (p \mathbf{v}_l) dV - \int_{\Omega} p \nabla \mathbf{v}_l dV = \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v}_l dS = 0. \quad (1.42)$$

Поэтому мы предполагаем далее, что член с давлением исключен. Эти два случая принципиально не отличаются, разница заключается только в технических деталях последующих вычислений, поэтому мы ограничиваемся описанием второго случая. Реализация процедуры Галеркина приведет к системе:

$$\begin{aligned} \sum_i A_{li} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{i,j} B_{lij} x_i x_j + \text{Re}^{-1} \sum_i C_{li} x_i + \text{Ro}^{-1} \sum_i P_{li} x_i + \sum_{i,j} L_{lij} y_i y_j + F_l \xi(t), \\ \sum_i H_{si} \frac{du_i}{dt} &= \sum_{i,j} W_{sij} x_i y_j + \text{Rm}^{-1} \sum_i D_{si} y_i, \end{aligned} \quad (1.43)$$

В этой системе коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_{li} &= \int_{\Omega} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_l dV, & B_{lij} &= - \int_{\Omega} (\mathbf{v}_i \nabla \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_l dV, \\ C_{li} &= \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_l dV, & P_{li} &= - \int_{\Omega} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_l dV, \\ L_{lij} &= \int_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{B}_i) \times \mathbf{B}_j] \mathbf{v}_l dV, & F_l &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \mathbf{v}_l dV, \\ H_{si} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_s dV, & W_{sij} &= \int_{\Omega} [\nabla \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j)] \mathbf{B}_s dV, \\ D_{si} &= \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{B}_i) \mathbf{B}_s dV. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Основная проблема заключается именно в вычислении этих интегралов. Следует отметить, что расчеты выполняются в сферической системе координат, где выражения очень сложны даже для основных дифференциальных операторов, таких как градиент, ротор и дивергенция. Очень громоздко, даже с учетом соленоидальной природы скоростных мод, инвариантное представление конвективной части ускорения [71]:

$$(\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_j = \frac{1}{2} [\nabla (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j) - \nabla \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_j) - \mathbf{v}_i \times (\nabla \times \mathbf{v}_j) - \mathbf{v}_j \times (\nabla \times \mathbf{v}_i)]. \quad (1.45)$$

Переход от таких инвариантных представлений через операторы градиента и ротора к тензорному формализму в сферических координатах не упрощает ситуацию. Если учесть, что сами моды скорости и индукции имеют очень сложную форму: (1.39), (1.40), становится ясно, что аналитические вычисления без использования компьютерных систем нереальны. Ситуация мало меняется даже, если принять во внимание очевидные симметрии $A_{li} = A_{il}$, $P_{li} = -P_{il}$, $H_{si} = H_{is}$, $C_{li} = C_{il}$, $D_{si} = D_{is}$. Последние две симметрии являются следствием самосопряженности оператора Лапласа.

Ситуация будет несколько упрощена, если в качестве базисных мод будут использованы нормированные собственные моды свободной диссипации скорости и магнитной индукции. Тогда $A_{li} = H_{li} = \delta_{li}$, а матрицы с элементами C_{li} и D_{si} становятся диагональными. Однако наиболее сложными для расчета являются коэффициенты нелинейных членов системы (1.43).

Рассмотрим, например, подынтегральное выражение в коэффициенте W_{sij} для случая, когда все три моды являются полоидальными:

$$\begin{aligned} & [\nabla \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j)] \mathbf{B}_s = \\ & = \left[\nabla \times \left[(\nabla \times (\nabla \times (u_{k_i n_s m_s}^P Y_{n_i}^{m_i} \mathbf{r}))) \times (\nabla \times (\nabla \times (b_{k_j n_j m_j}^P Y_{n_j}^{m_j} \mathbf{r}))) \right] \right] \cdot \\ & \cdot (\nabla \times (\nabla \times (b_{k_s n_s m_s} Y_{n_s}^{m_s} \mathbf{r}))). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Ясно, что после подстановки выражений для сферических функций и радиальных функций мы получаем конструкцию, для которой даже простой расчет всех роторов и векторных произведений невозможен вручную. А нам еще нужно взять интеграл.

Из всего вышесказанного следует, что альтернативы использованию систем аналитического вычисления для составления моделей типа (1.43) просто нет. Здесь также необходимо учесть, что после выбора мод и составления модели может оказаться, что она не описывает все необходимые процессы и взаимодействия, присущие динамо-системе (1.37), (1.38). Например, если все коэффициенты P_{li} равны нулю, получается, что модель (1.43) не содержит информации о вращении оболочки. В этом случае мы должны изменить набор режимов и, по крайней мере частично, пересчитать коэффициенты.

1.6.3 Использование компьютерных символьных вычислений для составления модели

Выше мы упоминали, что удобно составлять модели (1.43), если используемая система символьных вычислений содержит библиотеку функций векторного анализа и поддерживает работу в сферических координатах. Но даже если такой библиотеки нет, легко описать минимальный набор определяемых пользователем структур и функций, достаточных для решения описанных задач. Для удобства мы будем использовать имена типов данных и функций из библиотеки `VectorCalculus` пакета `Maple` [68, 69, 70].

Прежде всего, нам нужно определить структуру данных `VectorField`, представляющую векторные поля. Очевидно, эту структуру следует описывать как структурированный тип с тремя компонентами, соответствующими трем проекциям поля на векторы локального сферического базиса. Тип каждой компоненты является символьным выражением. Мы намеренно избегаем использования термина « поля » для обозначения компонент структурного типа, чтобы не было путаницы со скалярными и векторными полями. Если используемая система поддерживает объектно-ориентированную парадигму, то `VectorField` определяется как класс. Каждое векторное поле будет переменной типа `VectorField` или объектом класса `VectorField`.

Далее мы описываем функции или методы класса, которые реализуют набор необходимых операций:

- сложение и вычитание векторных полей (при использовании объектного подхода лучше перегрузить операции сложения и вычитания для объектов класса `VectorField`);
- произведение векторного поля и скалярного поля – `ScalarVectorProduct`;
- скалярное произведение двух векторных полей – `DotProduct`;
- векторное произведение двух векторных полей – `CrossProduct`;
- дивергенция векторного поля – `Divergence`;
- ротор векторного поля – `Curl`;
- градиент скалярного поля – `Gradient`.

Формулы для символьного представления этих операций (формулы векторного анализа в сферических координатах) можно найти во многих источниках, например, в популярном справочнике [71]. Затем, нам нужно задать аналитические выражения для сферических функций, если, конечно, они не являются стандартными в используемой системе. Для их определения мы используем известные рекуррентные соотношения для многочленов Лежандра и присоединенных функций Лежандра [71]. Мы можем просто определить сферические гармоники $Y_n^m(\theta, \varphi)$ в системе как функцию аргументов (n, m, θ, φ) рекурсивно для целочисленных переменных n и m , но тогда каждый из функций вызовов займет много времени. Поэтому лучше просто определить двумерный массив $Y[n, m]$ символьных выражений с переменными (θ, φ) , предварительно определив наибольшее используемое значение индекса n .

Аналогично, определяя максимальное предполагаемое значение радиального индекса k , мы формируем матрицы выражений для радиальных функций $u_{knt}^T, b_{knt}^T, u_{knt}^P, b_{knt}^P$. Затем нам нужно определить конкретный тип базисных мод. Например, если для них используются моды свободной диссипации, то все радиальные функции не зависят от индекса m и являются некоторыми линейными комбинациями степенных функций и сферических функций Бесселя [12]. Выражения для таких функций также легко получить из известных рекуррентных соотношений [71].

Итак, пусть выражения для всех радиальных функций и сферических гармоник построены и записаны в соответствующие массивы.

Теперь мы определяем два массива мультииндексов для мод скоростей и магнитного поля. Их элементы являются основными входными данными описанной программы символьных вычислений. Основываясь на значениях элементов этих двух массивов, мы составляем массивы типа `VectorField`, вычисляя их элементы по значениям мультииндекса и формулам (1.39), (1.40), используя определенные или стандартные операции векторного анализа. Однако, еще лучше не использовать конкретные выражения для радиальных функций, просто определяя их как произвольные функции аргумента r . Это сделает последующие вычисления более эффективными.

После заполнения массива полей мы можем перейти непосредственно к вычислению массивов коэффициентов (1.44) в циклах.

На каждом шаге цикла строится подынтегральное выражение, которое умножается на произведение коэффициентов Ламе для сферических координат. Эти выражение сначала аналитически интегрируются по φ в диапазоне от $-\pi$ до π . Если интеграл равен нулю, то соответствующему коэффициенту присваивается значение нуля. В противном случае полученное выражение интегрируется по θ в диапазоне от 0 до π . Если интеграл равен нулю, то соответствующему коэффициенту присваивается значение нуля.

С помощью этой методики расчетов определяются коэффициенты, которые точно обнуляются на этапе интегрирования по сфере. И конкретные выражения для радиальных функций не нужны. Системе нужно только знать, что это некоторые функции аргумента r . В связи с этим, система не тратит компьютерное время и оперативную память для обработки выражений радиальных функций. И только, если интеграл по сфере оказывается ненулевым, вместо абстрактных функций необходимо подставить специальные выражения радиальной функцией и осуществить интегрирование по r . И эта последнее интегрирование уже может выполняться численно, потому что, как правило, выражения для радиальных функций содержат параметры, которые определяются численно. В такой ситуации аналитическое интегрирование нецелесообразно.

Исключением является работа в сфере, так как на нулевой нижней границе часть интегралов по радиусу становится несобственными. В этом случае необходимо сначала задать выражения для радиальных функций, не указывая числовые коэффициенты, попытаться выполнить аналитическое интегрирование и, в случае успеха, заменить значения коэффициентов уже в конечном выражении.

1.6.4 Выводы по подразделу

Разработана математическая технология построения некоторого класса моделей геофизической гидродинамики с помощью компьютерных систем символьных вычислений. Она была реализована авторами в пакете Maple12 и успешно использовалась для разработки и изучения некоторых моделей геодинамо, например [8, 10, 12, 13]. Технология позволяет автоматизировать рутинные операции для расчета коэффициентов галеркинских приближений в гидродинамических задачах и значительно повышает надежность и скорость вычислений.

Результаты подраздела опубликованы в работе [72].

1.7 Фрактальные модели сейсмоакустической и электромагнитной активности

Статистические модели сейсмоакустической и электромагнитной активности, обусловленной деформационными возмущениями, рассмотрены на основе составного процесса Пуассона и его фрактальных обобщений. Также используются волновые представления этих процессов. Обсуждается пять режимов деформационной активности и их роль в понимании природы предвестников землетрясений.

1.7.1 Введение

Моделирование различных режимов сейсмоакустической и электромагнитной эмиссии, обусловленной деформационными возмущениями, особенно в режиме их активизации, актуально в связи с исследованиями природы предвестников землетрясений. Интерес представляет смена режимов деформационного процесса: неожиданные понижения и повышения его активности, длительность замирания и энергетика разрядки накопленных напряжений. Все эти особенности проявляются в сигналах сейсмоакустической и электромагнитной эмиссии, которые и используются для диагностики деформационного процесса.

Работа внешних сил поддерживает критический уровень упругих напряжений, в результате чего имеют место постоянно растущие пластические деформации. Этот процесс характеризуется скоростью случайных дислокационных изменений, которые определяются параметрами L и u дислокационного тензора – пространственным масштабом и величиной разрыва вектора смещения (вектором Бюргерса). Другие параметры тензора будем считать неизменными. Вернуть тензорное описание не сложно.

Заметим, что с помощью дислокационных изменений можно рассматривать разрывы, движения по существующим разломам, переупаковку зерен или блоков, фильтрацию жидкости в пористой среде и т. д. в широком диапазоне масштабов L (до 15-ти порядков).

1.7.2 Фрактальная модель

При постоянстве относительных упругих деформаций ε возможна связь $u/L = \varepsilon$. В этом случае можно рассматривать случайные дислокационные изменения как однопараметрический процесс $L_{V,T}(t) = \sum_{k=0}^N L(x_k, t_k)$, где сумма берется по всем дислокациям с координатами x_k, t_k в заданном объеме V и временном интервале T .

Случайными величинами являются x_k, t_k и $L(x_k, t_k)$. В первом приближении их можно считать независимыми, тогда процесс $L_{V,T}(t) = \sum_{k=0}^N L(x_k, t_k)$ можно рассматривать как составной процесс Пуассона с распределением независимых приращений $p(L)$. При $N \rightarrow \infty$ для $L_{V,T}(t)$ будем иметь устойчивое распределение $p(L_{V,T}, t)$ [73] с растущим средним, характеризующим процесс пластических деформаций в объеме V .

Если распределение независимых приращений $p(L)$ устойчивое, тогда и распределение $p(L_{V,T}, t)$ будет устойчивым на каждом шаге N с переменными во времени параметрами, что является обобщением гауссова процесса и ключом к пониманию универсальности и широкой распространенности в природе обладающих степенными свойствами устойчивых распределений, которыми можно аппроксимировать и закон Гутенберга-Рихтера в предположении независимости дислокационных изменений.

Независимость случайных величин x_k, t_k и $L(x_k, t_k)$ нарушается в дислокационных кластерах, в которых плотность дислокаций велика настолько, что перекрываются их радиусы влияния R_{inf} и T_{inf} , зависящие от $L(x_k, t_k)$ [74, 75]. О моделировании зон влияния см. [76, 77]. В кластерах можно различать разреженную и плотную упаковку дислокаций.

На примере сейсмического процесса в качестве разреженной упаковки дислокаций можно рассматривать последовательности форшоков и афтершоков, а плотной – главный удар (разрыв). Кластер событий представляет пластическое деформационное возмущение с переменной во времени упаковкой событий. Очевидно, что с ростом плотности событий увеличивается и их связанность. Последовательность форшоков можно рассматривать как фазу консолидации событий некоторого масштабного уровня, которая приводит к главному удару, событию более высокого масштабного уровня. А последовательность афтершоков можно рассматривать как фазу ветвления главного удара.

При таком представлении пластического деформационного возмущения мы видим взаимодействие масштабных уровней. В пространственно-временном представлении кластер событий развивается как процесс случайных блужданий, которому можно сопоставить фрактальный диффузионный процесс [74, 75], в общем случае немарковский, нелокальный и с памятью. Это значит, что все случайные величины x_k, t_k и $L(x_k, t_k)$ являются зависимыми в последовательности событий. Возможные упрощения будут обсуждаться ниже.

Радиусы влияния R_{inf} и T_{inf} растут с ростом $L(x_k, t_k)$ и становятся больше размеров области (V, T) , это приводит к тому, что крупные события всегда образуют кластер в рассмат-

риваемой области [74, 75], поэтому всегда возникают ограничения на использование обычного процесса Пуассона для моделирования крупных событий.

Для малых событий имеет место накапливающийся эффект. Со временем плотность малых дислокаций растет, они консолидируются и вызывают событие большего масштаба, после которого, как правило, возникает и обратная волна по каскаду масштабов в виде процесса ветвления. При таких каскадных эффектах события с разными масштабами нельзя считать независимыми.

Таким образом, мы имеем ограничение на использование обычного процесса Пуассона в качестве модели дислокационных изменений, как для крупных, так и малых событий. Тем не менее, для любого из выбранных масштабов в предположении их равноправия можно использовать обычный процесс Пуассона в качестве первого приближения или фонового режима. О таких событиях говорят еще как о мигрантах в область (V, T) [80]. А для учета более тонких эффектов необходимо рассматривать отклонения от фонового режима.

Отклонение от фонового режима может произойти, если возникает локальное упрочнение или ослабление среды (изменение реологии). При упрочнении среды возникает область, в которой пластический процесс замедляется, и поток событий ослабевает. Таким образом, например, возникает область сейсмического затишья или сейсмической брешы (Федотов), в которой формируется деформационная неоднородность. Накопленная в ней упругая энергия выделяется при разрядке напряжений.

Понятно, что такое накопление энергии нельзя описать обычным процессом Пуассона с потоком независимых событий, поскольку имеет место высокая степень локализации событий, которые не состоялись в затишье, но будут реализованы в деформационном возмущении. Их можно рассматривать как отложенные события. Дефицит событий приводит к росту упругих напряжений, в результате чего упрочнение среды преодолевается, а накопленная дополнительная упругая энергия высвобождается. При упрочнении среды происходит последовательная смена режимов пластического деформационного процесса: нормальные (фоновые) пульсации, их замедление (замирания), затем активизация (разрядка) и снова фоновый режим. Такая последовательность изменений называется перемежаемостью. При ослаблении среды замедление и активизацию следует поменять местами.

Возникшее деформационное возмущение (активизацию) можно рассматривать как событие более высокого масштаба по отношению к тем событиям, которые не состоялись во время затишья, вызванного локальным упрочнением среды. Энергетика деформационного возмущения должна соответствовать сумме энергий несостоявшихся событий.

Локальное упрочнение среды и подготовку деформационного возмущения на одном из пространственных масштабов L можно описать с помощью фрактального процесса Пуассона, для которого среднее число событий на временном интервале t дается выражением $\bar{n}_\nu(t) = \frac{(\mu t)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}$, где μ – поток событий с масштабом L без упрочнения среды, $\Gamma(1 + \nu)$ – гамма-функция, $0 < \nu \leq 1$ [78, 79]. При $\nu = 1$ имеем обычный процесс Пуассона. Обратную величину $1/\nu$ фрактального параметра ν можно рассматривать как параметр упрочнения среды. Действительно,

с его ростом (т.е. убыванием ν) поток событий $\bar{n}_\nu(t)$ замедляется при $\mu t > 1$, и дефицит событий $\bar{n}_\nu(t) - \bar{n}_1(t)$ вызывает рост напряжений. А время накопления несостоявшихся событий до того момента, как будет преодолено упрочнение среды, определит энергию деформационного возмущения.

Примечательно то, что параметр ν отвечает за фрактальную размерность распределения событий на временном интервале [73]. Таким образом, упрочнение среды (её реологическое свойство) меняет фрактальность процесса (статистику событий), что проявляется как замедленная релаксация, обусловленная эффектами памяти, которые возникли в результате упрочнения.

Замедление фрактального процесса связано с поведением вероятности сохранения процесса в исходном состоянии $P_0(t) = E_\nu(-(\mu t)^\nu)$ [78, 79], это вероятность выживания исходного состояния, где $E_\nu(x)$ – функция Миттаг-Леффлера, фрактальное обобщение экспоненты, $0 < \nu \leq 1$. Однако не функцию $E_\nu(x)$, а сложную функцию $E_\nu(-(\mu t)^\nu)$ называют фрактальной экспонентой, именно она является релаксационной характеристикой процесса. О свойствах её сложности, за которыми стоят два эффекта, будет сказано чуть ниже.

При малых значениях параметра ν релаксация исходного состояния замедляется, а времена ожидания увеличиваются. Этим и обусловлено замирание пульсаций. Перераспределение вероятности дается выражением $\Delta P_0(t) = E_\nu(-(\mu t)^\nu) - E_1(-\mu t)$, где $E_1(-\mu t) = e^{-\mu t}$.

Отклонение $P_0(t)$ от обычной экспоненты указывает на наличие эффектов последействия и памяти у фрактального процесса, которые обусловлены тем, что несостоявшиеся события локализованы и образуют кластер связанных между собой событий. В результате и возникает необходимость в использовании фрактального описания, которое является обобщением обычного процесса Пуассона. При таком подходе сохраняется преемственность теории. Рассмотрим, чем отличаются эффекты последействия и памяти.

На смену замираниям, когда упрочнение среды преодолевается, приходит пластическое деформационное возмущение, которое имеет три фазы: форшоков, главного удара и афтершоков. По существу, это реализуются те события, которые не состоялись при замирании. Первая и последняя фазы возмущения представлены разреженной упаковкой событий, а главный удар – плотной. Каждое из событий кластера влияет на последующие события, в этом проявляются эффекты последействия, и в то же время, любое из событий испытывает влияние предыдущих событий, это – эффекты памяти. Прошлое влияет на будущее через настоящее [73]. В результате и образуется цепочка событий, связанных настолько, что эффекты последействия и памяти трудно разделить, но ниже мы попытаемся это сделать, используя различные приближения.

Любое событие из последовательности форшоков, главного удара и афтершоков можно разложить на сумму событий с масштабом L . Общее число событий с масштабом L в пластическом деформационном возмущении должно примерно соответствовать числу несостоявшихся событий при замирании процесса. Такое представление деформационного возмущения позволяет оценить энергию возмущения и установить связь между масштабами: форшоки – волна консолидации событий выбранного масштабного уровня L , главный удар – реализация возмущения на наиболее высоком масштабном уровне, а афтершоки – волна ветвления главного

удара. Волны вверх и вниз по масштабам, а в пространстве и времени мы имеем сходящуюся и расходящуюся волны, центром которых является главный удар. Заметим, что в фазе затишья есть только расходящаяся волна из несостоявшихся событий. Это медленный диффузионный процесс, в то время как в деформационном возмущении процесс более быстрый на 3-4 порядка, волновой в главном ударе и диффузионный в форшоках и афтершоках.

Таким образом, в деформационном возмущении происходит одновременно эволюция упаковки событий масштаба L и взаимодействие масштабов за счет консолидации и ветвления. Здесь можно отметить аналогию с турбулентностью, в которой происходит объединение и дробление вихрей, наблюдается перемежаемость режимов. Между дислокацией и вихрем имеется прямая аналогия. Об отличии спектров подробнее остановимся ниже.

Временную форму пластического деформационного возмущения можно рассматривать как фрактальный аналог импульса Берлаге с переменной плотностью упаковки событий масштаба L и переменной фрактальной размерностью. При построении модели возмущения будем использовать различные модификации фрактальной экспоненты $P_0(t) = E_\nu(-(\mu t)^\nu)$, которую применяли для описания фазы затишья.

Для вероятности возникновения главного удара будем использовать выражение $P_{t < t^*}(\tau) = E_\alpha(-(\tilde{\mu}\tau)^\alpha)$ – это возрастающая (развёрнутая во времени) фрактальная экспонента, где τ – время с отсчетом от момента начала главного удара t^* , $\tau = t - t^*$, $\tau < 0$, $\tilde{\mu}$ – средний поток событий в деформационном возмущении, $0 < \alpha \leq 1$. Вероятностью отсутствия главного удара будет $\tilde{P}_{t < t^*}(\tau) = 1 - P_{t < t^*}(\tau)$. Дифференцируя это выражение, получим распределение нарастающего потока форшоков, которое можно рассматривать как обратный закон Омори. Этот процесс будет начальной стадией фрактального импульса Берлаге.

Для вероятности сохранения главного удара будем использовать следующее выражение $P_{t' < t}(\tau') = E_\beta(-(\tilde{\mu}\tau')^\beta)$ – это убывающая фрактальная экспонента, где τ' – время с отсчетом от момента окончания главного удара t' , $\tau' = t - t'$, $\tau' > 0$, параметр $\tilde{\mu}$ имеет то же значение, $0 < \beta \leq 1$. Вероятностью не сохранения главного удара будет $\tilde{P}_{t' < t}(\tau') = 1 - P_{t' < t}(\tau')$. Дифференцируя это выражение, получим убывающий поток афтершоков, т.е. закон Омори, который можно рассматривать как фазу затухания фрактального импульса Берлаге.

Чтобы сшить два полученных фрактальных выражения, примем во внимание, что поток событий в фазе главного удара плотно упакован и постоянен, а уплотнение фрактальных потоков не может превзойти плотную упаковку. В фазе форшоков упаковка событий нарастает до максимально возможной, в главном ударе – сохраняется, а в афтершоках – убывает. Фрактальные параметры α и β определяются свойствами среды, её способностью к консолидации и ветвлению событий. Средний поток событий $\tilde{\mu}$ в пластическом деформационном возмущении определяется фазой затишья, которая характеризуется параметрами μ , ν и временем затишья. Масштабы времени μ и $\tilde{\mu}$ могут отличаться на 3–4 порядка, поскольку возмущение скоротечно.

Фаза форшоков в возмущении, как правило, очень быстрая, поэтому ею в первом приближении можно пренебречь и рассматривать только афтершоки, как ветвление главного удара (ETAS модель) [80]. Однако для целей прогноза землетрясений интерес представляет именно

фаза форшоков и предшествующая ей фаза замираний. По времени замирания можно оценить энергию разрядки напряжений, а по фазе форшоков прогнозируется скорость развития пластического деформационного возмущения, что дает время краткосрочного прогноза. В связи с этим и возникла необходимость построения новой теории.

1.7.3 Сравнение с ETAS моделью

Осталось показать, что наш результат соответствует ETAS модели, если в нём пренебречь эффектами памяти. Для вероятности выживания исходного состояния ETAS модель дает $P(\tau) = e^{-\nu\tau - b(\nu\tau)^{1-\theta}}$ [80]. Судя по показателю экспоненты этого выражения, имеем два потока событий. Первый из них соответствует процессу Пуассона с постоянным потоком, а второй – процессу с убывающим во времени по степенному закону потоком событий. Второй поток учитывает афтершоки как ветвление событий первого потока. Пренебрегая как более слабым первым потоком и дифференцируя выражение $1 - e^{-b(\nu\tau)^{1-\theta}}$ для вероятности перехода из начального состояния в любое другое, получим распределение Вейбулла для времен ожидания афтершоков.

Для фазы афтершоков наш результат дает $P_{t' < t}(\tau') = E_\beta(-(\tilde{\mu}\tau')^\beta)$. Сделав в нём замену фрактальной экспоненты на затянутую $P_{t' < t}(\tau') \simeq e^{-(\tilde{\mu}\tau')^\beta}$, получим результат ETAS модели, который неплохо согласуется с сейсмическими данными [80], однако возможны более тонкие эффекты, которые будут обсуждаться ниже.

Дифференцирование выражения $1 - P_{t' < t}(\tau') \simeq 1 - e^{-(\tilde{\mu}\tau')^\beta}$, которое является вероятностью перехода из начального состояния в любое другое, даёт, как и в ETAS модели, распределение Вейбулла для времен ожидания афтершоков. Значения $0 < \beta < 1$ соответствуют убывающему во времени потоку событий (афтершоков), т. е. закону Омори. Значение $\beta = 1$ соответствует постоянному потоку событий – процессу Пуассона. В физике твердого тела параметр β называется показателем Вейбулла.

Из сравнения фрактального подхода с ETAS моделью можно сделать вывод о том, что степенной аргумент $(\mu t)^\nu$ фрактальной экспоненты $E_\nu(-(\mu t)^\nu)$ отвечает за процессы ветвления (эффекты последствия, которые проявляются как фрактальное замедление потока), а сама функция $E_\nu(x)$ дает описание эффектов памяти. Вместе $(\mu t)^\nu$ и $E_\nu(x)$ дают замедленную релаксацию.

Эффекты памяти в ETAS модели отсутствуют, замена $E_\nu(x) \rightarrow e^{-x}$ меняет релаксацию существенно. Таким образом, фрактальный подход учитывает историю процесса и открывает более широкие возможности для описания свойств среды.

Например, для моделирования релаксации можно использовать зависимость $\tilde{P}_0(t) = E_{\tilde{\nu}}(-(\mu t)^\nu)$ с разными показателями ветвления ν и памяти $\tilde{\nu}$. Такой подход соответствует фрактальному процессу Пуассона с переменным во времени по степенному закону потоком событий. При этом число фрактальных характеристик среды удваивается.

1.7.4 Физический смысл показателя экспоненты $b = 3/2$

Заметим, что для форшоков степенной аргумент фрактальной экспоненты отвечает за процессы консолидации, а не ветвления. Процесс обратной диффузии (консолидации) идет вспять в неравновесной среде. В разрыве два противоположной направленности в пространстве масштабов процесса присутствуют одновременно. Они взаимодействуют как в системе встречных волн, формируя фрактальную волну разрушений (пару кинк и антикинк), которая сложным образом взаимодействует с неравновесной средой, получая энергию упругих деформаций для производства разрушений и генерации упругих и электромагнитных колебаний. Модель комплекса фрактальных волновых процессов может быть предметом следующей работы, а здесь сделаем лишь некоторые замечания.

В системе координат, связанной с волной разрушений, дислокационный процесс можно представить как осциллятор. Это хорошо известное описание дислокационных изменений с помощью уравнения синус-Гордон. Фрактальные свойства процесса вводятся для описания взаимодействия волны разрушений со средой. Период осцилляций определяется временем формирования τ_L одной дислокации масштаба L в разрыве. А число колебаний n_R – отношением $n_R = \tau_R/\tau_L$, где τ_R – время формирования разрыва, n_R играет роль топологического квантового числа. Аналогичные числа можно ввести для форшоков и афтершоков, \hat{n}_R и \hat{n}_R . Естественно, что сумма всех квантовых чисел (число событий масштаба L в кластере) должна соответствовать дефициту событий в период затишья: $S_D = \hat{n}_R + n_R + \hat{n}_R$ – квантовому числу деформационного возмущения. Эта величина, которая определяется свойствами среды, характеризует энергию пластического деформационного возмущения и соотношение масштабных уровней.

Фрактальная структура деформационного возмущения раскрывается с помощью вейвлет преобразования разложением по базису импульсных функций, форма которых согласована с формой рассматриваемого возмущения. Такое разложение получило название разреженной аппроксимации [81, 82], для которой в качестве базисных функций используются импульсы Берлаге. Очевидно, что число вейвлет слагаемых можно сопоставить квантовому числу деформационного возмущения S_D , при этом каждый из вейвлет-слагаемых дает детальную информацию о том, как формируется разрыв.

Здесь возникает глубокая аналогия с квантовой механикой, используя которую можно структуру элементарных частиц представить как деформационное возмущение.

Формирование разрыва можно рассматривать как процесс Пуассона, простой или фрактальный, а значит для распределения разрывов по размерам $p(L)$, которое соответствует закону Гутенберга-Рихтера, будем иметь устойчивое или дробно устойчивое распределение. Чем отличаются эти распределения, см. в [73]. Для нас наибольший интерес представляют дробно устойчивые распределения, в которых, как было показано выше, учитываются эффекты ветвления и памяти.

При формировании разрыва возникают фазированные упругие и электромагнитные колебания [83]. Это обусловлено тем, что в дислокации одновременно появляются пара сил

и элемент тока, которые служат источниками двух видов колебаний. А разрыв можно представить как поток дислокаций. Интересно найти связь между энергией и масштабом разрыва (да и возмущения в целом), которая до настоящего времени известна только из наблюдений. Обратимся опять к аналогии с квантовой механикой.

С использованием уравнения синус-Гордон формирование разрыва можно представить как движение волны на периодическом потенциале с добавлением энергии разрушений и упругих деформаций. Потери на излучение здесь не рассматриваем. Гамильтониан этих колебаний будет иметь вид $E^2 = m^2(L) + p^2 - \sigma^2 L^2 + \varepsilon k L^3$, где E – оператор энергии колебаний, $m^2(L)$ – периодический потенциал (для уравнения Гордона), p – оператор импульса, $\sigma^2 L^2$ – энергия разрушений, σ^2 – удельная энергия разрушений, $\varepsilon k L^3$ – энергия упругих деформаций, ε – относительные деформации (их критический уровень поддерживается работой внешних сил), k – модуль сдвига.

Волна неограниченного разрушения возможна при выполнении условия Гриффитса $L > \sigma^2/(\varepsilon k)$. При $L \rightarrow \infty$ ($p \sim 1/L$) получим асимптотическое выражение $E^2 \sim \varepsilon k L^3$, которое и дает связь энергии упругих колебаний с масштабом возмущения $E \sim \sqrt{\varepsilon k} L^{3/2}$. Это выражение используется для перехода от магнитуды к логарифму энергии события, показатель степени $b = 3/2$ (значение b в выражении $\lg E = a + b \lg L$, где $\lg L = M$ – магнитуда). До настоящего времени величина $b = 3/2$ была известна лишь из экспериментальных данных, а физический смысл параметра $a = \sqrt{\varepsilon k}$ вообще не обсуждался. Особо надо отметить, что величина ε является характеристикой состояния среды и имеет физический смысл критических упругих относительных деформаций.

Турбулентные пульсации скорости удовлетворяют следующему соотношению $\nu \sim l^{1/3}$, а энергии $\nu^2 \sim l^{2/3}$, где l – масштаб пульсаций. У турбулентности много общего с деформационным возмущением (разрушением), однако их степенные спектры пульсаций отличаются показателями степени, что обусловлено различиями в исходных динамических уравнениях.

1.7.5 Обсуждение

У деформационных возмущений много общего с электрическим пробоем и грозowymi разрядами, с акустическими и электромагнитными флуктуациями в плазме. Разработанная статистическая модель поможет иначе взглянуть на внезапность высыпаний из радиационных поясов, особенности северных сияний и природу шаровых молний. А аналогия с квантовой механикой открывает новые возможности в исследованиях фрактальной динамики элементарных частиц и космического излучения.

У пластических деформаций много общего и с эпидемиями, см. ETAS модель [80], прообразом которой стал процесс Маркова-Пойя. Его фрактальное обобщение позволит учесть эффекты памяти и в заболеваниях.

Множественность аналогий между различными физическими процессами, указывает на то, что все они относятся к общему для них классу критических явлений.

Пластические деформационные возмущения развиваются на порядки быстрее, чем период их подготовки, поэтому возмущения являются источниками повышенной сейсмоакустической и электромагнитной эмиссии, которая приобретает статистические характеристики связанных дислокационных изменений в кластерах, что и позволяет использовать аномалии в её сигналах для диагностики активизации деформационных процессов. Интенсивность эмиссии в фоновом режиме и в период затишья существенно ниже, чем при активизации процесса, и различия между фоном и затишьем могут быть незначительные, поэтому потребуются длительные наблюдения и их сравнительный анализ, чтобы выявить дефицит событий, который приведет к разрядке напряжений.

Особую роль эмиссия пластических деформационных возмущений играет в процессах литосферно-ионосферного взаимодействия именно потому, что интенсивность её намного превосходит эмиссию фонового режима. Ионосферные эффекты наблюдаются с помощью ионозондов, GPS технологий и лидаров в вариациях параметров ионосферы, высыпаниях заряженных частиц из радиационных слоев и образовании светорассеивающих слоев в ионосфере возбужденными атомами и ионами. Сравнимые по величине эффекты в ионосфере могут создаваться и грозowymi разрядами.

1.7.6 Выводы по подразделу

Предложена фрактальная модель пластического деформационного возмущения и связанной с ним сейсмоакустической и электромагнитной эмиссии.

Показано, что фрактальная модель учитывает эффекты ветвления и памяти, а ETAS модель – только ветвления.

Спектры флуктуаций деформационного возмущения и турбулентности отличаются в силу различий в их динамических уравнениях.

Дано статистическое обоснование закона Гутенберга-Рихтера с использованием устойчивых распределений для фонового режима и дробно устойчивых для фаз затишья и возмущения. Для более детального описания предлагается использовать фрактальный процесс Пуассона с переменным во времени по степенному закону потоком.

Возникающее в представлении деформационного возмущения в виде фрактального импульса Берлаге топологическое квантовое число определяется дефицитом событий на стадии подготовки деформационного возмущения, а при обработке сигналов получается с помощью разреженной аппроксимации возмущения.

Топологическое квантовое число определяет связь между масштабными уровнями и может быть использовано в качестве основания логарифма при масштабировании.

Установлена динамическая связь между энергией и масштабом деформационного возмущения (дислокации, сейсмического события). Тем самым дано обоснование перехода от магнитуд к логарифму энергии события.

Основные результаты подраздела опубликованы в работе [84].

1.8 Нелокальные модели осцилляторов

1.8.1 Общая постановка задач Коши для нелинейных эредитарных осцилляторов

Теория эредитарных процессов получила широкое развитие в последние десятилетия, о чем свидетельствует множество работ как зарубежных [85]-[88], так и отечественных авторов [89], [90]. Например, в монографии В.В. Учайкина [89] эредитарным процессам посвящена целая глава. Эредитарные процессы – процессы, обладающие эффектами памяти. Например, в эредитарной системе эффект памяти означает зависимость текущего состояния системы от ее предыдущих состояний. Поэтому такие процессы описываются с помощью интегро-дифференциальных уравнений, в которых содержатся функции памяти. Если функции памяти имеют степенную зависимость по времени, тогда можно перейти от интегро-дифференциальных уравнений к уравнениям с производными дробных порядков [91]. В этом случае эредитарные процессы иногда называют фрактальными, а порядки дробных производных могут быть связаны с фрактальной размерностью системы, а также зависеть от времени и функции смещения. Отметим, что дробное исчисление достаточно хорошо изучено и насчитывает более чем 300-ую историю. Отметим такие настольные книги по этой проблематике, как [89],[91]-[94].

Объектом нашего исследования будут являться эредитарные нелинейные осцилляторы, которые описываются с помощью производных дробных переменных порядков, входящих в модельные уравнения. Такой интерес вызван их многочисленными приложениями [95]-[97]. Далее с помощью теории конечно-разностных схем найдем их численные решения. Эта работа является логическим продолжением работы автора [90], где были исследованы математические модели линейных эредитарных колебательных систем.

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение эредитарного осциллятора для функции $x(t) \in C^2[0, T]$:

$$\int_0^t K_1(t-\tau) \ddot{x}(\tau) d\tau + \lambda(x(t), t) \int_0^t K_2(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau = F(x(t), t), \quad (1.47)$$

где $K_1(t-\tau)$ и $K_2(t-\tau)$ – ядра, функции памяти, $\lambda(x(t), t)$ – функция, определяющая трения, $F(x(t), t)$ – некоторая нелинейная функция, которая определяет тип осциллятора, $x(t)$ – функция смещения, $t \in [0, T]$ – время колебательного процесса, $T > 0$ – время моделирования. Если в уравнении (1.47) функции памяти имеют степенную зависимость от времени с $1 < \beta(x(t), t) < 2, 0 < \gamma(x(t), t) < 1$:

$$K_1(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{1-\beta(x(t), t)}}{\Gamma(2-\beta(x(t), t))}, K_2(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-\gamma(x(t), t)}}{\Gamma(1-\gamma(x(t), t))}, \quad (1.48)$$

то интегро-дифференциальное уравнение (1.47) можно записать в терминах производных дробных переменных порядков:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t), t)} x(\tau) + \lambda(x(t), t) \partial_{0t}^{\gamma(x(t), t)} = F(x(t), t), \quad (1.49)$$

где

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2 - \beta(x(t),t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(x(t),t)-1}},$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma(x(t),t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\gamma(x(t),t)}}$$

– операторы дробного дифференцирования переменных порядков.

Существует другое представление операторов дробных производных, например, если степенные функции (1.48) с $1 < \beta(x(\tau), \tau) < 2, 0 < \gamma(x(\tau), \tau) < 1$ имеют вид:

$$K_1(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{1 - \beta(x(\tau), \tau)}}{\Gamma(2 - \beta(x(\tau), \tau))}, K_2(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{-\gamma(x(\tau), \tau)}}{\Gamma(1 - \gamma(x(\tau), \tau))}, \quad (1.50)$$

тогда уравнение (1.49) запишется несколько иначе:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(\tau), \tau)} x(\tau) + \lambda(x(t), t) \partial_{0t}^{\gamma(x(\tau), \tau)} x(\tau) = F(x(t), t), \quad (1.51)$$

где

$$\partial_{0t}^{\beta(x(\tau), \tau)} x(\tau) = \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{\Gamma(2 - \beta(x(\tau), \tau)) (t - \tau)^{\beta(x(\tau), \tau) - 1}},$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(\tau), \tau)} x(\tau) = \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \gamma(x(\tau), \tau)) (t - \tau)^{\gamma(x(\tau), \tau)}}$$

– операторы дробного дифференцирования.

Уравнения (1.49) и (1.51) описывают класс эрдитарных нелинейных колебательных систем, и они будут являться в дальнейшем объектами нашего исследования. Для уравнений (1.49) и (1.51) справедливы начальные условия вида:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0. \quad (1.52)$$

Задачи Коши (1.49), (1.52) и (1.51), (1.52) будем решать с помощью теории конечно-разностных схем [98]. Рассмотрим некоторые варианты аппроксимации операторов дробного дифференцирования, входящих в уравнения (1.49) и (1.51). Для этого рассмотрим равномерную расчетную сетку и разобьем отрезок $[0, T]$ на N частей с постоянным шагом τ при этом $t_k = k\tau, k = 1, \dots, N - 1$. Введем сеточную функцию $x(t_{k\tau}) = x_k$. Согласно работе [99], такую аппроксимацию можно осуществить с помощью следующих формул для операторов из уравнения (1.49):

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t), t)} x(\tau) \approx W_k \sum_{j=0}^{k-1} p_j^k (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j+1}), W_k = \frac{\tau^{-\beta_k}}{\Gamma(3 - \beta_k)}, \quad (1.53)$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(t), t)} x(\tau) \approx V_k \sum_{j=0}^{k-1} q_j^k (x_{k-j+1} - x_{k-j}), V_k = \frac{\tau^{-\gamma_k}}{\Gamma(2 - \gamma_k)},$$

где весовые коэффициенты p_j^k и q_j^k определяются по формулам:

$$p_j^k = (j+1)^{2-\beta_k} - j^{2-\beta_k}, q_j^k = (j+1)^{1-\gamma_k} - j^{1-\gamma_k}.$$

Для операторов из уравнения (1.51):

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\beta(x(\tau),\tau)} x(\tau) &\approx \sum_{j=0}^{k-1} p_j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j+1}), \\ \partial_{0t}^{\gamma(x(\tau),\tau)} x(\tau) &\approx \sum_{j=0}^{k-1} q_j (x_{k-j+1} - x_{k-j}), \end{aligned} \quad (1.54)$$

где весовые коэффициенты p_j и q_j имеют вид:

$$p_j = \frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} [(j+1)^{2-\beta_j} - j^{2-\beta_j}], q_j = \frac{\tau^{-\gamma_j}}{\Gamma(2-\gamma_j)} [(j+1)^{1-\gamma_j} - j^{1-\gamma_j}].$$

Можно показать, следуя методикам из работ [100] и [101], что аппроксимации операторов дробного дифференцирования (1.53) и (1.54) имеют первый порядок. Если необходимо аппроксимировать операторы дифференцирования со вторым порядком, то можно воспользоваться следующими модифицированными формулами трапеций [102]:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) \approx \frac{\tau^{2-\beta_k}}{\Gamma(4-\beta_k)} \sum_{j=0}^k a_j^k D^2 x_j, \quad (1.55)$$

где весовые коэффициенты уже будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} a_j^k &= \begin{cases} k^{2-\beta_k} (3 - \beta_k - k) + (k-1)^{3-\beta_k}, & j=0 \\ (k-j-1)^{3-\beta_k} - 2(k-j)^{3-\beta_k} + (k-j+1)^{3-\beta_k}, & j=1, \dots, k-1, \\ 1, & j=k, \end{cases} \\ b_j^k &= \begin{cases} k^{1-\gamma_k} (2 - \gamma_k - k) + (k-1)^{2-\gamma_k}, & j=0 \\ (k-j-1)^{2-\gamma_k} - 2(k-j)^{2-\gamma_k} + (k-j+1)^{2-\gamma_k}, & j=1, \dots, k-1, \\ 1, & j=k, \end{cases} \end{aligned}$$

а $D^2 x_j$ и Dx_j – дифференциальные операторы для второй и первой производных. Для значений x_j , где $j=1, \dots, N-1$ эти операторы можно аппроксимировать со вторым порядком известными формулами центральных разностей: $D^2 x_j \approx \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{\tau^2}$, $Dx_j \approx \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2\tau}$.

Рассмотрим более подробно аппроксимацию в точке x_0 для оператора $D^2 x_0$, так как не задано дополнительного начального условия для второй производной при $t=0$, то можно его аппроксимировать разностной формулой вида: $D^2 x_0 \approx \frac{x_1 - 2x_0 + x_{-1}}{\tau^2}$, где узел x_{-1} будет являться фиктивным и определяется согласно второму начальному условию (1.52) по формуле: $x_{-1} = x_1 - 2\tau y_0$. В итоге соотношения (1.55) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\tau^{2-\beta_k}}{\Gamma(4-\beta_k)} \sum_{j=0}^k a_j^k D^2 x_j = \frac{\tau^{-\beta_k}}{\Gamma(4-\beta_k)} \left[a_0^k (x_1 - x_0 - \tau y_0) + \sum_{j=1}^k a_j^k (x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) \right], \quad (1.56)$$

$$\frac{\tau^{1-\gamma_k}}{\Gamma(3-\gamma_k)} \sum_{j=0}^k b_j^k D x_j = \frac{\tau^{-\gamma_k}}{\Gamma(3-\gamma_k)} \left[b_0^k \tau y_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k b_j^k (x_{j+1} - x_{j-1}) \right],$$

где $y_0 = D x_0$ следует из начальных условий (1.52).

Аналогично мы можем рассмотреть аппроксимацию для дифференциальных операторов дробных производных, входящих в уравнение (1.51):

$$\partial_{0t}^{\beta(x(\tau),\tau)} x(\tau) \approx c_0^k (x_1 - x_0 - \tau y_0) + \sum_{j=1}^k c_j^k (x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}), \quad (1.57)$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(\tau),\tau)} x(\tau) \approx d_0^k \tau y_0 + \sum_{j=1}^k d_j^k (x_{j+1} - x_{j-1}),$$

$$c_j^k = \begin{cases} \frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(4-\beta_0)} \left(k^{2-\beta_k} (3-\beta_k-k) + (k-1)^{3-\beta_k} \right), & j=0 \\ \frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(4-\beta_j)} \left((k-j-1)^{3-\beta_j} - 2(k-j)^{3-\beta_j} + (k-j+1)^{3-\beta_j} \right), & j=1, \dots, k-1, \\ \frac{\tau^{-\beta_k}}{\Gamma(4-\beta_k)}, & j=k, \end{cases}$$

$$d_j^k = \begin{cases} \frac{\tau^{-\gamma_0}}{2\Gamma(3-\gamma_0)} \left(k^{1-\gamma_k} (2-\gamma_k-k) + (k-1)^{2-\gamma_k} \right), & j=0 \\ \frac{\tau^{-\gamma_j}}{2\Gamma(3-\gamma_j)} \left((k-j-1)^{2-\gamma_j} - 2(k-j)^{2-\gamma_j} + (k-j+1)^{2-\gamma_j} \right), & j=1, \dots, k-1, \\ \frac{\tau^{-\gamma_k}}{2\Gamma(3-\gamma_k)}, & j=k, \end{cases}$$

Отметим, что можно построить аппроксимации операторов дробных производных более высокого порядка. Например, по обобщенным формулам Симпсона [102]. В этой работе мы с помощью аппроксимаций (1.53)-(1.57) построим и исследуем соответствующие конечно-разностные схемы для дифференциальных задач (1.49), (1.52) и (1.51), (1.52) в зависимости от вида функций $F(x(t), t)$, $\beta(x(t), t)$, $\gamma(x(t), t)$ и $\lambda(x(t), t)$, а также значений управляющих параметров. С помощью конечно-разностных схем построим и исследуем осциллограммы и фазовые траектории эрдитарных нелинейных осцилляторов.

Необходимо отметить, что аппроксимации (1.55) и (1.57) имеют второй порядок, поэтому построенные на их основе конечно-разностные схемы должны иметь также второй порядок аппроксимации. Однако, если аппроксимация в граничных точках имеет первый порядок, то конечно-разностная схема в итоге будет иметь первый порядок аппроксимации. Для повышения порядка аппроксимации конечно-разностной схемы необходимо использовать специальные методики аппроксимации в граничных точках, например, метод фиктивного узла. Нам не будет интересно более высокий, чем первый порядок, аппроксимации конечно-разностных схем.

Необходимо отметить, что так как мы не знаем точных решений задач Коши (1.49), (1.52) и (1.51), (1.52), то для оценки порядка точности, предложенных конечно разностных схем, мы воспользуемся следующим соотношением:

$$p \approx \log_2 \left(\frac{\max_i |x_i - x_{2i}|}{\max_i |x_{2i} - x_{4i}|} \right), \quad (1.58)$$

где x_i, x_{2i}, x_{4i} – численные решения, полученные на $\tau, \tau/2, \tau/4$ шаге. Соотношение (1.58) можно использовать для оптимального выбора шага τ в конечно-разностных схемах и для тестирования схем на сходимость.

1.8.2 Эредитарный осциллятор Дуффинга

Рассмотрим типичный нелинейный осциллятор Дуффинга [103], но с учетом эредитарности. В этом случае для эредитарного осциллятора Дуффинга в уравнении (1.47) положим: $F(x(t), t) = f(t) + x(t) - x^3(t)$ и $\lambda(x(t), t)$ является постоянной функцией. Здесь функция $f(t)$ – внешнее воздействие на колебательную систему, как правило, гармоническая функция. Применяя аппроксимации (1.53)-(1.57), с учетом начальных условий (1.52)), мы получим два семейства конечно разностных схем. Для первого семейства конечно-разностная схема задачи (1.49),(1.52) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau y_0 + x_0, k = 0, \\ x_{k+1} &= A_k x_k - B_k x_{k-1} - B_k \sum_{j=1}^{k-1} p_j^k (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j}) - \\ &\quad - C_k \sum_{j=1}^{k-1} q_j^k (x_{k-j+1} - x_{k-j}) - D_k x_k^3 + D_k f_k, k = 1, \dots, N-1, \\ A_k &= \frac{2W_k + \lambda V_k + 1}{W_k + \lambda V_k}, B_k = \frac{W_k}{W_k + \lambda V_k}, C_k = \frac{\lambda V_k}{W_k + \lambda V_k}, D_k = \frac{1}{W_k + \lambda V_k} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Схема (1.57) является аппроксимацией для дифференциальной задачи (1.49), (1.52) с правой частью $F(x(t), t) = f(t) + x(t) - x^3(t)$. Для дифференциальной задачи (1.51), (1.52) мы приходим к следующей схеме:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau y_0 + x_0, k = 0, \\ x_{k+1} &= A_0 x_k - B_0 x_{k-1} - B_0 \sum_{j=1}^{k-1} p_j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \\ &\quad - C_0 \sum_{j=1}^{k-1} q_j (x_{k-j+1} - x_{k-j}) - D_0 x_k^3 + D_0 f_k, k = 1, \dots, N-1, \\ A_0 &= \frac{2W_0 + \lambda V_0 + 1}{W_0 + \lambda V_0}, B_0 = \frac{W_0}{W_0 + \lambda V_0}, C_0 = \frac{\lambda V_0}{W_0 + \lambda V_0}, D_0 = \frac{1}{W_0 + \lambda V_0}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Второе семейство конечно разностных схем может быть представлено для задачи (1.49), (1.52) в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4\tau^{-\beta_0}} \left(f_0 - x_0 - x_0^3 - \frac{2\lambda\tau^{1-\gamma_0} y_0}{\Gamma(3-\gamma_0)} + \frac{4\tau^{-\beta_0} x_0}{\Gamma(4-\beta_0)} + \frac{4\tau^{1-\beta_0} y_0}{\Gamma(4-\beta_0)} \right), k = 0, \\ x_2 &= \frac{(2A_1 + 1)}{A_1 + B_1} x_1 - \frac{(A_1 - B_1)}{A_1 + B_1} x_0 + \frac{f_1 - x_1^3}{A_1 + B_1} - \frac{C_1(x_1 - x_0 - \tau y_0) - D_1 y_0}{A_1 + B_1}, k = 1, \\ x_{k+1} &= \frac{(2A_k + 1)}{A_k + B_k} x_k - \frac{(A_k - B_k)}{A_k + B_k} x_{k-1} - \frac{C_k(x_1 - x_0 - \tau y_0)}{A_k + B_k} + \frac{f_k - D_k y_0 - x_k^3}{A_k + B_k} - \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$-\frac{A_k}{A_k + B_k} \sum_{j=1}^{k-1} a_k^j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \frac{B_k}{A_k + B_k} \sum_{j=1}^{k-1} b_k^j (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}), k = 2, \dots, N-1,$$

$$A_k = \frac{\tau^{-\beta_k}}{\Gamma(4 - \beta_k)}, B_k = \frac{\lambda \tau^{-\gamma_k}}{2\Gamma(3 - \gamma_k)}, C_k = A_k a_0^k, D_k = \frac{\lambda \tau^{1-\gamma_k} b_0^k}{\Gamma(3 - \gamma_k)}.$$

и для задачи (1.51), (1.52):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4\tau^{-\beta_0}} \left(f_0 - x_0 - x_0^3 - \frac{2\lambda\tau^{1-\gamma_0}y_0}{\Gamma(3 - \gamma_0)} + \frac{4\tau^{-\beta_0}x_0}{\Gamma(4 - \beta_0)} + \frac{4\tau^{1-\beta_0}y_0}{\Gamma(4 - \beta_0)} \right), k = 0, \\ x_2 &= \frac{(2c_1^1 + 1)}{c_1^1 + \lambda d_1^1} x_1 - \frac{(c_1^1 - \lambda d_1^1)}{c_1^1 + \lambda d_1^1} x_0 + \frac{f_1 - 2\lambda\tau d_0^1 y_0 - x_1^3}{c_1^1 + \lambda d_1^1} - \frac{2c_0^1 (x_1 - x_0 - \tau y_0)}{c_1^1 + \lambda d_1^1}, k = 1, \\ x_{k+1} &= \frac{(2c_k^k + 1)}{c_k^k + \lambda d_k^k} x_k - \frac{(c_k^k - \lambda d_k^k)}{c_k^k + \lambda d_k^k} x_{k-1} - \frac{2c_0^k (x_1 - x_0 - \tau y_0)}{c_k^k + \lambda d_k^k} + \frac{f_k - 2\lambda\tau d_0^k y_0 - x_k^3}{c_k^k + \lambda d_k^k} - \\ &-\frac{1}{c_k^k + \lambda d_k^k} \sum_{j=1}^{k-1} c_j^k (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \frac{1}{c_k^k + \lambda d_k^k} \sum_{j=1}^{k-1} d_j^k (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}), k = 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Отметим, что в работе [104] был рассмотрен эрдитарный осциллятор Дуффинга с фрактальным трением с дробной производной Римана-Лиувилля. Такой осциллятор использовался для изучения вязкоупругих свойств пучков, пластин и цилиндрических оболочек в работе [97], а также в работе [96] для организации и настройки PID контроллера. В работах [105] и [106] проведено обобщение модели осциллятора Дуффинга с фрактальным трением, построены осциллограммы и фазовые траектории для этой колебательной системы, получены новые колебательные режимы и подтверждены результаты работы [104]. В работе [107] была предложена математическая модель эрдитарного осциллятора Дуффинга с производными дробных постоянных порядков в смысле Герасимова-Капуто, а в работе [108] была обобщена на случай переменных дробных порядков. Рассмотрим некоторые примеры работы конечно разностных схем (1.59)-(1.62). Для оценки точности конечно-разностных схем воспользуемся критерием (1.58).

Пример 1. Управляющие параметры для эрдитарного осциллятора Дуффинга выберем следующими: $\beta(t) = 1.6 - 0.001t$, $\gamma(t) = 0.7 - 0.005t$, $f(t) = \delta \cos(\omega t)$, $\delta = 20$, $\omega = 1$, $\lambda = 0.3$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.1$.

На рисунке 1.18 приведены осциллограмма (рисунок 1.18а) и фазовая траектория (рисунок 1.18б), полученная для примера 1 при $N = 2000$ и $T = 100$ с помощью одной из конечно разностных схем (1.59)-(1.62).

Из рисунка 1.18 мы можем увидеть, что амплитуда колебаний (рисунок 1.18а) имеет установившийся характер. Также можно заметить некоторое раздвоение колебаний на минимумах и максимумах, что на фазовой траектории (рисунок 1.18б) соответствует симметричным петлям. Фазовая траектория (рисунок 1.18б) выходит на предельный цикл, так как колебания, не затухающие с установившейся амплитудой.

Рассмотрим вычислительную точность конечно-разностных схем (1.59)-(1.62). Результаты численных экспериментов приведены в следующей таблице 1.2.

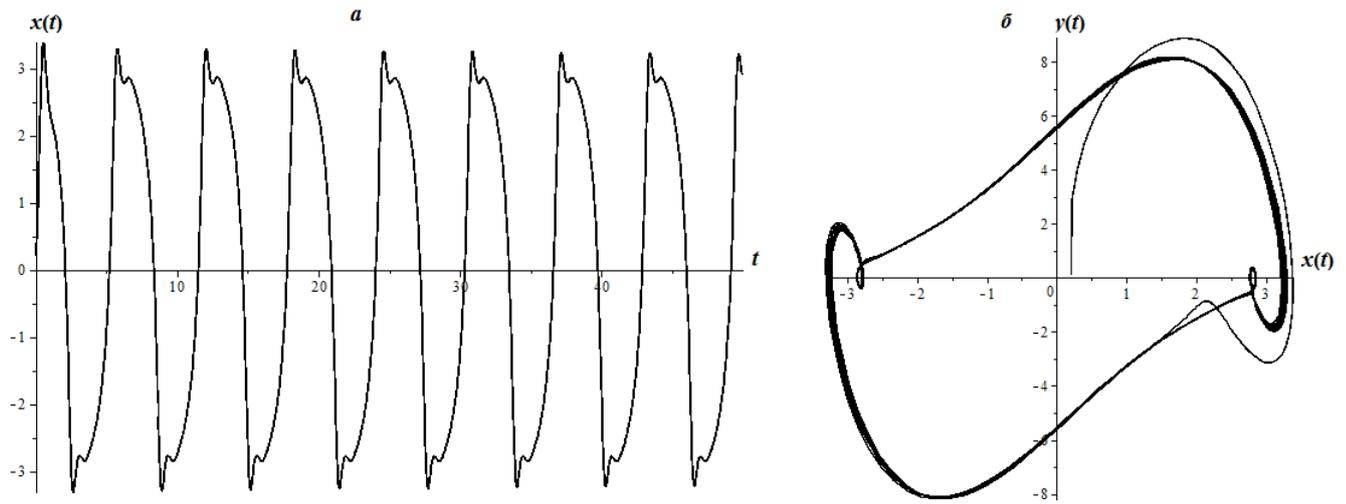


Рисунок 1.18 — Осциллограмма (а) и фазовая траектория (б) для примера 1.

Таблица 1.2 — Вычислительная точность конечно разностных схем (1.59)-(1.62)

N	τ	$Er_1,$ (1.59)	$Er_2,$ (1.60)	$Er_3,$ (1.61)	$Er_4,$ (1.62)	$p_1,$ (1.59)	$p_2,$ (1.60)	$p_3,$ (1.61)	$p_4,$ (1.62)
20	0.05	0.1944515	0.194454	0.06545	0.065439	—	—	—	—
40	0.025	0.0998851	0.099896	0.033964	0.033938	0.961069	0.9609231	0.946505	0.947233
80	0.125	0.0509775	0.050984	0.017465	0.017437	0.970406	0.9703693	0.959522	0.960712
160	0.00625	0.0259438	0.025947	0.008920	0.008892	0.974469	0.9744707	0.969283	0.971589
320	0.005	0.0131504	0.013152	0.004523	0.004496	0.980284	0.9802334	0.979604	0.983864
640	0.0025	0.0066456	0.006648	0.002283	0.002258	0.984637	0.9843101	0.986328	0.993028
1280	0.00125	0.0033529	0.003352	0.001149	0.001123	0.986988	0.9878165	0.990407	1.007489

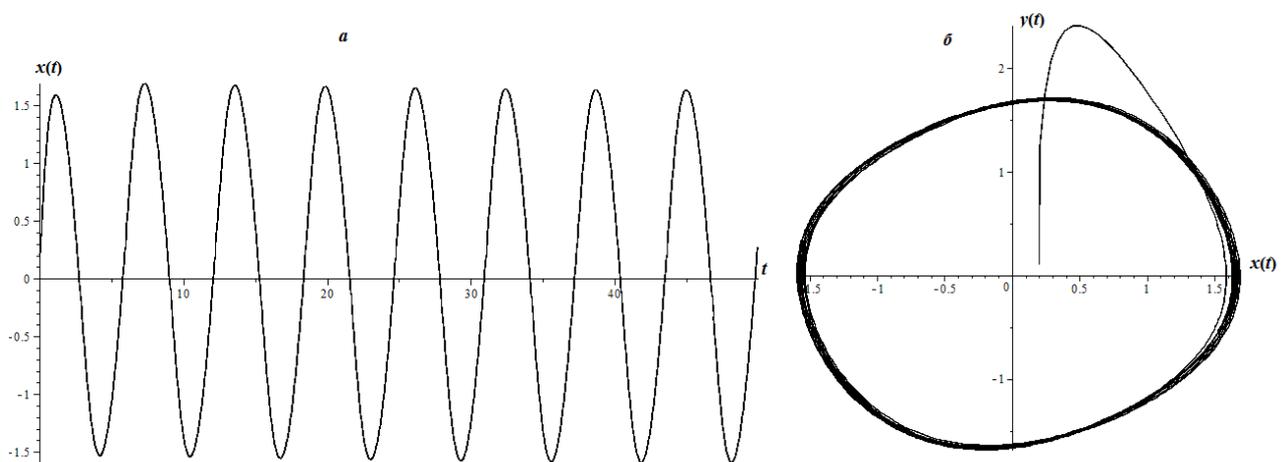


Рисунок 1.19 — Осциллограмма (а) и фазовая траектория (б) для примера 2.

Из таблицы 1.2 видно, что уменьшение в два раза шага τ для всех конечно-разностных схем приводит к уменьшению максимальных абсолютных ошибок Er_1, Er_2, Er_3, Er_3 также примерно в два раза. Это косвенно подтверждает первый порядок точности схем (1.59)-(1.62).

С помощью формулы (1.58), мы получили расчетные значения точности схем (1.59)-(1.62), которые близки к единицы. Однако можно отметить, что конечно-разностные схемы (1.61) и

80	0.125	0.0183411	0.018266	0.003875	0.003851	0.937189	0.9366180	0.880612	0.887442
160	0.00625	0.0094436	0.009408	0.002046	0.002013	0.957662	0.9572574	0.921386	0.935664
320	0.005	0.0048195	0.004802	0.001057	0.001023	0.970462	0.9701829	0.952665	0.976261
640	0.0025	0.0024456	0.002437	0.000538	0.000508	0.978666	0.9783855	0.972014	1.008989
1280	0.00125	0.0012362	0.001232	0.000272	0.000260	0.984296	0.9835989	0.983524	0.964771

Расчетная осциллограмма и фазовая траектория приведена для этого случая на рисунке 1.19. при $N = 2000$ и $T = 100$. Здесь также, как и в предыдущем случае, мы видим установившуюся амплитуду колебаний (рисунок 1.19а), поэтому фазовая траектория выходит на предельный цикл (рисунок 1.19б). В отличие от предыдущего примера, фазовая траектория на рисунке 1.19б не имеет петель, а колебания можно считать квазипериодическими.

Рассмотрим работу конечно-разностных схем (1.59)-(1.62). Результаты компьютерных экспериментов для этого примера приведены в таблице 1.3.

Из таблицы 1.3 можно увидеть, что абсолютные ошибки уменьшаются с уменьшением шага τ . Расчетные порядки точности схем (1.59)-(1.62) для этого примера близки к единице. Схемы (1.61) и (1.62) несколько точнее, так как их максимальные ошибки меньше более чем в два раза.

1.8.3 Эредитарный осциллятор Ван дер Поля

Рассмотрим другой тип эредитарного осциллятора – эредитарный осциллятор Ван дер Поля, который характеризует автоколебания. Для этого в исходных уравнениях (1.49) и (1.51) надо положить: $F(x(t), t) = f(t) - x(t)$, $\lambda(x(t), t) = \mu(x(t)^2 - 1)$, где μ – коэффициент, который характеризует нелинейность в силу затухания колебаний.

Применяя аппроксимации (1.53)-(1.57) к уравнениям (1.49) и (1.51), в итоге переходим от дифференциальной задачи Коши (1.49) и (1.52) к разностному аналогу:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau y_0 + x_0, k = 0, \\ x_{k+1} &= A_k x_k - B_k x_{k-1} - B_k \sum_{j=1}^{k-1} p_j^k (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \\ &- C_k \sum_{j=1}^{k-1} q_j^k (x_{k-j+1} - x_{k-j}) + D_k f_k, k = 1, \dots, N-1, A_k = \frac{2W_k + \mu(x_k^2 - 1)V_k - 1}{W_k + \mu(x_k^2 - 1)V_k}, \\ B_k &= \frac{W_k}{W_k + \mu(x_k^2 - 1)V_k}, C_k = \frac{\mu(x_k^2 - 1)V_k}{W_k + \mu(x_k^2 - 1)V_k}, D_k = \frac{1}{W_k + \mu(x_k^2 - 1)V_k}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Аналогично, от дифференциальной задачи Коши (1.49) и (1.52) мы переходим к разностной задаче:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau y_0 + x_0, k = 0, \\ x_{k+1} &= A_k x_k - B_k x_{k-1} - B_k \sum_{j=1}^{k-1} p_j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \\ &- C_k \sum_{j=1}^{k-1} q_j (x_{k-j+1} - x_{k-j}) + D_k f_k, k = 1, \dots, N-1, A_k = \frac{2W_0 + \mu(x_k^2 - 1)V_0 - 1}{W_0 + \mu(x_k^2 - 1)V_0}, \\ B_k &= \frac{W_0}{W_0 + \mu(x_k^2 - 1)V_0}, C_k = \frac{\mu(x_k^2 - 1)V_0}{W_0 + \mu(x_k^2 - 1)V_0}, D_k = \frac{1}{W_0 + \mu(x_k^2 - 1)V_0}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Другое семейство конечно-разностных схем для эредитарного осциллятора Ван дер Поля имеет вид для задачи (1.49), (1.52):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4\tau^{-\beta_0}} \left(f_0 + x_0 - \frac{2\lambda\tau^{1-\gamma_0}y_0}{\Gamma(3-\gamma_0)} + \frac{4\tau^{-\beta_0}x_0}{\Gamma(4-\beta_0)} + \frac{4\tau^{1-\beta_0}y_0}{\Gamma(4-\beta_0)} \right), k = 0, \\ x_2 &= \frac{(2A_1 - 1)}{A_1 + B_1} x_1 - \frac{(A_1 - B_1)}{A_1 + B_1} x_0 + \frac{f_1 - D_1 y_0 - C_1 (x_1 - x_0 - \tau y_0)}{A_1 + B_1}, k = 1, \\ x_{k+1} &= \frac{(2A_k - 1)}{A_k + B_k} x_k - \frac{(A_k - B_k)}{A_k + B_k} x_{k-1} - \frac{C_k (x_1 - x_0 - \tau y_0)}{A_k + B_k} + \frac{f_k - D_k y_0}{A_k + B_k} - \\ &- \frac{A_k}{A_k + B_k} \sum_{j=1}^{k-1} a_k^j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \frac{B_k}{A_k + B_k} \sum_{j=1}^{k-1} b_k^j (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}), k = 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$A_k = \frac{\tau^{-\beta_k}}{\Gamma(4 - \beta_k)}, B_k = \frac{\mu(x_k^2 - 1)\tau^{-\gamma_k}}{2\Gamma(3 - \gamma_k)}, C_k = A_k a_0^k, D_k = \frac{\mu(x_k^2 - 1)\tau^{1-\gamma_k} b_0^k}{\Gamma(3 - \gamma_k)}.$$

и для задачи (1.51), (1.52):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4\tau^{-\beta_0}} \left(f_0 + x_0 - \frac{2\mu(x_0^2 - 1)\tau^{1-\gamma_0}y_0}{\Gamma(3 - \gamma_0)} + \frac{4\tau^{-\beta_0}x_0}{\Gamma(4 - \beta_0)} + \frac{4\tau^{1-\beta_0}y_0}{\Gamma(4 - \beta_0)} \right), k = 0, \\ x_2 &= \frac{(2c_1^1 - 1)}{c_1^1 + \mu(x_1^2 - 1)d_1^1} x_1 - \frac{(c_1^1 - \mu(x_1^2 - 1)d_1^1)}{c_1^1 + \mu(x_1^2 - 1)d_1^1} x_0 + \frac{f_1 - 2\mu(x_1^2 - 1)\tau d_0^1 y_0 - 2c_0^1(x_1 - x_0 - \tau y_0)}{c_1^1 + \mu(x_1^2 - 1)d_1^1}, k = 1, \\ x_{k+1} &= \frac{(2c_k^k - 1)}{c_k^k + \mu(x_k^2 - 1)d_k^k} x_k - \frac{(c_k^k - \mu(x_k^2 - 1)d_k^k)}{c_k^k + \mu(x_k^2 - 1)d_k^k} x_{k-1} - \frac{2c_0^k(x_1 - x_0 - \tau y_0)}{c_k^k + \mu(x_k^2 - 1)d_k^k} + \\ &+ \frac{f_k - 2\mu(x_k^2 - 1)\tau d_0^k y_0}{c_k^k + \mu(x_k^2 - 1)d_k^k} - \frac{1}{c_k^k + \mu(x_k^2 - 1)d_k^k} \sum_{j=1}^{k-1} c_j^k (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \\ &- \frac{1}{c_k^k + \mu(x_k^2 - 1)d_k^k} \sum_{j=1}^{k-1} d_j^k (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}), k = 2, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Эредитарный осциллятор Ван дер Поля с производной дробного переменного порядка в диссипативной составляющей рассматривался в работе [109] с целью изучения вязкоупругих свойств осциллятора. В работе [110] автором была предложена математическая модель эредитарного осциллятора Ван дер Поля с производными дробных постоянных порядков в смысле Герасимова-Капуто. Рассмотрим работу схем (1.63)-(1.66) на конкретных примерах.

Пример 3. Управляющие параметры для эредитарного осциллятора Ван дер Поля выберем следующими: $\beta(t) = 1.8 - 0.001 \cos(\pi t)$, $\gamma(t) = 0.7 - 0.005 \sin(\pi t)$, $f(t) = \delta \cos(\omega t)$, $\delta = 20$, $\omega = 1$, $\mu = 12$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.1$. На рисунке 1.8.3 приведены осциллограмма (рисунок 1.8.3а) и фазовая траектория (рисунок 1.8.3б) для этого примера при значениях $N = 2000$ и $T = 100$.

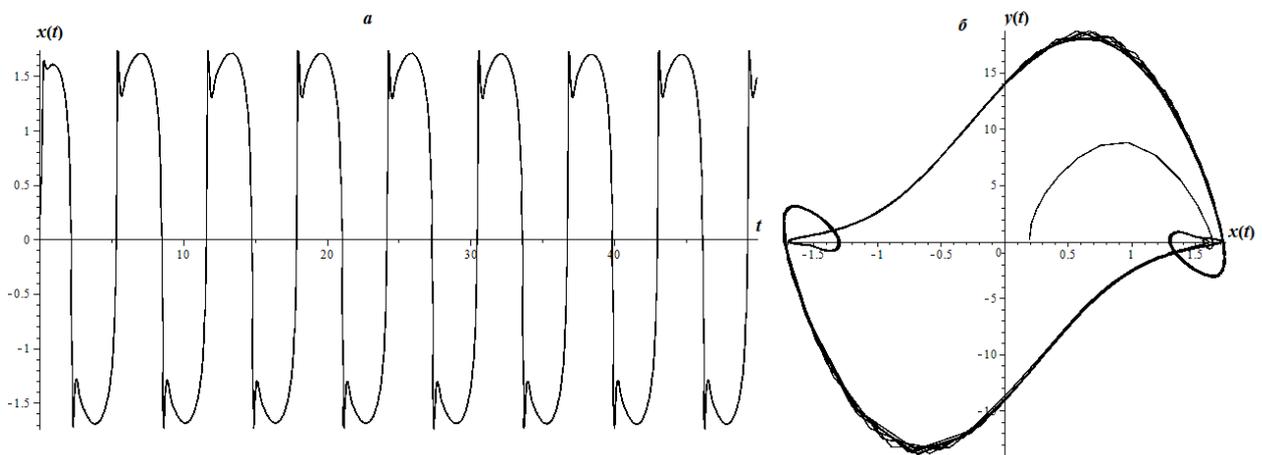


Рисунок 1.20 — Осцилляторы (а) и фазовые траектории (б) для примера 3

Из рисунка 1.19 видно, что осциллограмма (рисунок 1.8.3а) и фазовая траектория (рисунок 1.8.3б) похожи на осциллограмму (рисунок 1.18а) и фазовую траекторию (рисунок 1.18б) для эредитарного осциллятора Дуффинга. Поэтому можно сделать вывод о том, что введение

производных с переменными дробными порядками в исходное уравнение осциллятора дает возможность получить колебательные режимы присущие другим осцилляторам. Работа конечно-разностных схем (1.63)-(1.66) приведена в таблице 1.4.

Таблица 1.4 — Вычислительная точность конечно разностных схем (1.63)-(1.66)

N	τ	$Er_1,$ (1.63)	$Er_2,$ (1.64)	$Er_3,$ (1.65)	$Er_4,$ (1.66)	$p_1,$ (1.63)	$p_2,$ (1.64)	$p_3,$ (1.65)	$p_4,$ (1.66)
20	0.05	0.092366	0.092825	0.054139	0.054158	—	—	—	—
40	0.025	0.043317	0.043437	0.027006	0.027052	1.092444	1.095582	1.003393	1.001426
80	0.125	0.021751	0.021792	0.014257	0.014334	0.993828	0.995147	0.921644	0.916317
160	0.00625	0.011073	0.011092	0.007356	0.00745	0.9741	0.974306	0.954676	0.94418
320	0.005	0.00566	0.00567	0.003742	0.003842	0.968138	0.968079	0.975201	0.955324
640	0.0025	0.002895	0.002901	0.001887	0.001988	0.966982	0.966912	0.987242	0.950474
1280	0.00125	0.001479	0.001483	0.000948	0.001045	0.968881	0.968351	0.993047	0.927668

Обратим внимание на то, что все конечно-разностные схемы примерно одинаковы работают для этого примера. Действительно, максимальные по модулю ошибки для этих схем незначительно отличаются друг от друга. При уменьшении шага τ эти ошибки также уменьшаются примерно в два раза. Расчетные порядки точности близки к единице.

Пример 4. Управляющие параметры: $\beta(t) = 1.8 - 0.003 \sin(t)$, $\gamma(t) = 0.8 - 0.005 \sin(t)$, $f(t) = \delta \cos(\omega t)$, $\delta = 0$, $\omega = 1$, $\mu = 1$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.1$. На рисунке 1.8.3 приведены осциллограмма и фазовые траектории для этого примера.

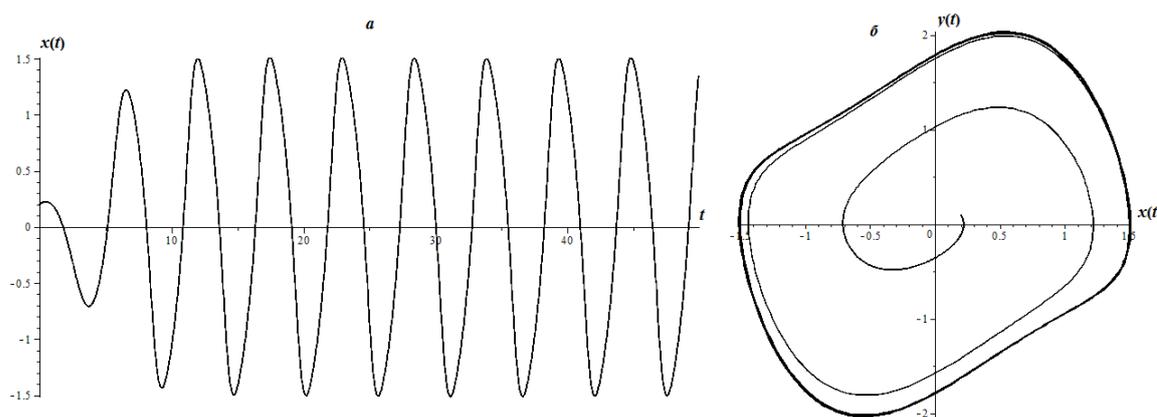


Рисунок 1.21 — Осциллограмма (а) и фазовая траектория (б)

Обратим внимание, что в примере 4 функция $f(t) = 0$. Амплитуда колебаний (рисунок 1.8.3а) со временем выходит на постоянный уровень, а фазовая траектория (рисунок 1.8.3б) стремится к аттрактору. Отметим, что введение производных дробных порядков в осцилляционное уравнение с нулевой правой частью приводит к затуханию колебаний. Это было показано в работе [89], где для эрдитарного осциллятора в законе полной механической энергии

появляются члены, которые отвечают за диссипацию энергии. В этом примере вы видим отсутствие диссипации энергии при нулевой правой части. Исследование конечно-разностных схем (1.63)-(1.66) приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5 — Вычислительная точность конечно разностных схем (1.63)-(1.66)

N	τ	$Er_1,$	$Er_2,$	$Er_3,$	$Er_4,$	$p_1,$	$p_2,$	$p_3,$	$p_4,$
N	τ	(1.63)	(1.64)	(1.65)	(1.66)	(1.63)	(1.64)	(1.65)	(1.66)
20	0.05	0.00231	0.0023083	0.0048479	0.0048557	—	—	—	—
40	0.025	0.00126	0.0012646	0.0025069	0.002509	0.8684	0.8680	0.9514	0.9526
80	0.125	0.00068	0.0006827	0.0012752	0.0012726	0.8897	0.8894	0.9751	0.9792
160	0.00625	0.00036	0.0003638	0.000643	0.0006368	0.9081	0.9079	0.9879	0.9989
320	0.005	1.92E-04	1.92E-04	3.23E-04	0.0003131	0.9229	0.9214	0.9915	1.0240
640	0.0025	1.00E-04	1.01E-04	1.61E-04	0.0001515	0.9382	0.9265	1.0083	1.0479
1280	0.00125	5.27E-05	5.15E-05	8.64E-05	7.43E-05	0.9259	0.9732	0.8962	1.0269

Из таблицы 1.5 следует, что конечно разностные схемы имеют первый порядок точности, но несколько лучше работают схемы (1.65) и (1.66).

1.8.4 Эредитарный осциллятор с учетом stick-slip эффекта

Рассмотрим нелинейный осциллятор, который характеризует эффект прилипания скольжения и исследуется в рамках теории трибологии. С помощью этого осциллятора можно, например, описать латеральное движение груза по поверхности электронного атомного микроскопа [111] или использовать его в качестве механической модели землетрясений [112]. В этом случае в правой части уравнений (1.49) и (1.52) находится функция:

$$F(x(t), t) = f(x(t), t) - \omega^{\beta(x(t), t)} x(t) = bt + c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx(t)) - \omega^{\beta(x(t), t)} x(t),$$

где b — скорость движения груза вдоль поверхности, c — энергия адгезии поверхности, $a_n = 2n \int_0^1 \frac{\cos(\pi n \tau) d\tau}{\cosh^2(\pi \tau)}$ — коэффициенты ряда Фурье. Рассмотрим расчетные конечно-разностные схемы для этого случая первое семейство для задачи (1.49), (1.52):

$$x_1 = \tau y_0 + x_0, k = 0,$$

$$x_{k+1} = A_k x_k - B_k x_{k-1} - B_k \sum_{j=1}^{k-1} p_j^k (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \quad (1.67)$$

$$- C_k \sum_{j=1}^{k-1} q_j^k (x_{k-j+1} - x_{k-j}) + D_k f_k, k = 1, \dots, N-1, A_k = \frac{2W_k + \lambda V_k - \omega^{\beta_k}}{W_k + \lambda V_k},$$

$$B_k = \frac{W_k}{W_k + \lambda V_k}, C_k = \frac{\lambda V_k}{W_k + \lambda V_k}, D_k = \frac{1}{W_k + \lambda V_k}.$$

Для задачи (1.51), (1.52):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tau y_0 + x_0, k = 0, \\
x_{k+1} &= A_k x_k - B_0 x_{k-1} - B_0 \sum_{j=1}^{k-1} p_j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \\
&- C_0 \sum_{j=1}^{k-1} q_j (x_{k-j+1} - x_{k-j}) + D_0 f_k, k = 1, \dots, N-1, A_k = \frac{2W_0 + \lambda V_0 - \omega^{\beta_k}}{W_0 + \lambda V_0}, \\
B_0 &= \frac{W_0}{W_0 + \lambda V_0}, C_0 = \frac{\lambda V_0}{W_0 + \lambda V_0}, D_0 = \frac{1}{W_0 + \lambda V_0}.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Второе семейство конечно-разностных схем для задачи (1.49), (1.52):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\frac{4\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(4-\beta_0)}} \left(f_0 + \omega^{\beta_0} x_0 - \frac{2\lambda\tau^{1-\gamma_0} y_0}{\Gamma(3-\gamma_0)} + \frac{4\tau^{-\beta_0} x_0}{\Gamma(4-\beta_0)} + \frac{4\tau^{1-\beta_0} y_0}{\Gamma(4-\beta_0)} \right), k = 0, \\
x_2 &= \frac{(2A_1 - \omega^{\beta_1})}{A_1 + B_1} x_1 - \frac{(A_1 - B_1)}{A_1 + B_1} x_0 + \frac{f_1 - D_1 y_0 - (x_1 - x_0 - \tau y_0)}{A_1 + B_1}, k = 1, \\
x_{k+1} &= \frac{(2A_k - \omega^{\beta_k})}{A_k + B_k} x_k - \frac{(A_k - B_k)}{A_k + B_k} x_{k-1} - \frac{C_k (x_1 - x_0 - \tau y_0)}{A_k + B_k} + \frac{f_k - D_k y_0}{A_k + B_k} - \\
&- \frac{A_k}{A_k + B_k} \sum_{j=1}^{k-1} a_k^j (x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - \frac{B_k}{A_k + B_k} \sum_{j=1}^{k-1} b_k^j (x_{j+1} - x_{j-1}), k = 2, \dots, N-1, \\
A_k &= \frac{\tau^{-\beta_k}}{\Gamma(4-\beta_k)}, B_k = \frac{\lambda\tau^{-\gamma_k}}{2\Gamma(3-\gamma_k)}, C_k = A_k a_0^k, D_k = \frac{\lambda\tau^{1-\gamma_k} b_0^k}{\Gamma(3-\gamma_k)}.
\end{aligned} \tag{1.69}$$

и для задачи (1.51), (1.52):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\frac{4\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(4-\beta_0)}} \left(f_0 + \omega^{\beta_0} x_0 - \frac{2\lambda\tau^{1-\gamma_0} y_0}{\Gamma(3-\gamma_0)} + \frac{4\tau^{-\beta_0} x_0}{\Gamma(4-\beta_0)} + \frac{4\tau^{1-\beta_0} y_0}{\Gamma(4-\beta_0)} \right), k = 0, \\
x_2 &= \frac{(2c_1^1 - \omega^{\beta_1})}{c_1^1 + \lambda d_1^1} x_1 - \frac{(c_1^1 - \lambda d_1^1)}{c_1^1 + \lambda d_1^1} x_0 + \frac{f_1 - 2\lambda\tau d_0^1 y_0}{c_1^1 + \lambda d_1^1} - \frac{2c_0^1 (x_1 - x_0 - \tau y_0)}{c_1^1 + \lambda d_1^1}, k = 1, \\
x_{k+1} &= \frac{(2c_k^k - \omega^{\beta_k})}{c_k^k + \mu (x_k^2 - 1) d_k^k} x_k - \frac{(c_k^k - \lambda d_k^k)}{c_k^k + \lambda d_k^k} x_{k-1} - \frac{2c_0^k (x_1 - x_0 - \tau y_0)}{c_k^k + \lambda d_k^k} + \frac{f_k - 2\lambda\tau d_0^k y_0}{c_k^k + \lambda d_k^k} - \\
&- \frac{1}{c_k^k + \lambda d_k^k} \sum_{j=1}^{k-1} c_j^k (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \frac{1}{c_k^k + \lambda d_k^k} \sum_{j=1}^{k-1} d_j^k (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}), k = 2, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{1.70}$$

В работе [111] указывается, что для расчета достаточно взять следующие семь коэффициентов Фурье: $a_1 = 0.436, a_2 = 0.344, a_3 = 0.164, a_4 = 0.058, a_5 = 0.021, a_6 = 0.004, a_7 = 0.003$. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5. Управляющие параметры для эредитарного осциллятора с эффектом stick-slip выберем следующими: $\beta(t) = 1.8 - 0.003 \sin(t)$, $\gamma(t) = 0.8 - 0.005 \sin(t)$, $b = 1$, $\delta = 50$, $\omega = 1$, $\lambda = 0.3$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.1$.

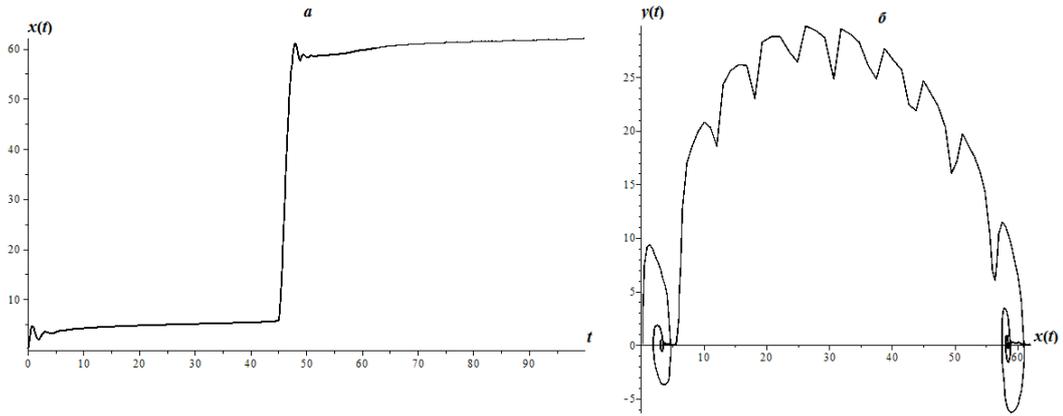


Рисунок 1.22 — Осциллограмма (а) и фазовая траектория (б) для примера 5

На рисунке 1.22 приведена осциллограмма и фазовые траектории, полученные по одной из схем (1.67)-(1.70).

На рисунке 1.22 видны две потенциальные ямы, в которых груз начинает прилипать вследствие адгезии поверхности. Далее виден срыв груза, после чего груз начинает скользить, испытывая колебания. Исследуем схемы (1.67)-(1.70).

Таблица 1.6 — Вычислительная точность конечно разностных схем (1.67)-(1.70)

N	τ	$Er_1,$ (1.67)	$Er_2,$ (1.68)	$Er_3,$ (1.69)	$Er_4,$ (1.70)	$p_1,$ (1.67)	$p_2,$ (1.68)	$p_3,$ (1.69)	$p_4,$ (1.70)
20	0.05	0.187949	0.1882492	0.0698794	0.06990063	—	—	—	—
40	0.025	0.094602	0.0946681	0.0332290	0.033235488	0.9903	0.991692	1.0724	1.07258
80	0.125	0.048539	0.0485631	0.0161959	0.016186577	0.9627	0.963018	1.0368	1.037926
160	0.00625	0.025085	0.0250945	0.0080066	0.007984488	0.9522	0.952487	1.0163	1.019526
320	0.005	0.012992	0.0129958	0.0039862	0.00395411	0.9491	0.949322	1.0061	1.013846
640	0.0025	0.006717	0.0067195	0.0019907	0.001952693	0.9516	0.951615	1.0017	1.017887
1280	0.00125	0.003462	0.0034631	0.0009957	0.000954282	0.9562	0.956267	0.9995	1.032977

Конечно-разностные схемы имеют первый порядок точности, схемы (1.69) и (1.70) для этого примера более точны, чем схемы (1.67) и (1.68).

1.8.5 Исследование устойчивости эрдитарных нелинейных осцилляторов

В этом разделе рассмотрим критерии устойчивости некоторых фрактальных нелинейных осцилляторов. Отметим, что устойчивость нелинейных осцилляторов отличается от устойчивости линейных осцилляторов, так как необходимо исследовать не только их стационарные состояния, но и предельные циклы [88]. Устойчивость колебательной системы приводит к периодическим режимам, а неустойчивость к хаотическим режимам. Дадим следующее определение фрактальной нелинейной системы.

Фрактальная нелинейная система может быть записана с помощью оператора Герасимова-Капуто:

$$\partial_{0t}^{\alpha_i} x_i(\tau) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), t), x_i(0) = c_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.71)$$

где $0 < \alpha_i < 2$, а c_i – известные константы.

Ключевым объектом исследования в теории устойчивости динамических систем являются точки равновесия.

Точки равновесия $E^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ системы (1.71) являются решениями следующей системы алгебраических уравнений:

$$f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), t) = 0. \quad (1.72)$$

Фрактальная нелинейная система (1.71) может быть соизмеримой и несоизмеримой [88]. Фрактальная нелинейная система (1.71) называется соизмеримой, если выполняется условие: $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$. Если выполняется условие: $\alpha_1 \neq \dots \neq \alpha_n$ – несоизмеримой.

В работе [113] были сформулированы и доказаны следующие две важные теоремы асимптотической устойчивости нелинейной фрактальной системы (1.71).

Теорема 1.1. Точки равновесия системы (1.71) называются асимптотически устойчивыми для соизмеримой системы, если собственные значения λ_i матрицы Якоби $J = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, вычисленные согласно точкам равновесия E^* удовлетворяют следующим условиям:

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.73)$$

Теорема 2.1. Точки равновесия системы (1.71) называются асимптотически устойчивыми для несоизмеримой системы, где $\alpha_i = \frac{\beta_i}{m}$, если выполняются следующие условия:

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\gamma\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n, \gamma = 1/m, \quad (1.74)$$

а λ вычисляется согласно уравнению:

$$\det(\text{diag}([\lambda^{m\alpha_1} \dots \lambda^{m\alpha_n}]) - J) = 0.$$

Пусть система (1.71) описывает фрактальный осциллятор Ван-дер-Поля. Рассмотрим случай соизмеримой системы, когда в (1.71) выполнено условие $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, т.е. случай классического осциллятора Ван-дер-Поля, характеризующегося модельным уравнением вида:

$$\ddot{x}(t) + \xi(x(t)^2 - 1)\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Система (1.71) в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1(t) - \xi(x_1^2(t) - 1)x_2(t). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Матрица Якоби системы (1.75) записывается так

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\xi x_1^* x_2^* & -\xi(x_1^{*2} - 1) \end{bmatrix} = 0, \quad (1.76)$$

где точки $E^* = (x_1^*, x_2^*)$ – точки покоя системы (1.75). Из этой системы очевидно, что существует единственная точка покоя $E^* = (0,0)$. Тогда характеристическое уравнение для системы (1.75) с учетом (1.76) имеет вид:

$$\lambda^2 - \xi\lambda + 1 = 0 \quad (1.77)$$

Можно убедиться, что корни характеристического уравнения (1.77) при $\xi > 0$ не удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Действительно, в нашем случае имеет место неравенство для значений $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1$

$$|\arg(\lambda_{1,2})| < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому точка состояния равновесия $E^* = (0,0)$ системы (1.75) будет неустойчивой, в частности, если $0 < \xi < 2$ – неустойчивый фокус, если $\xi > 2$ – неустойчивый узел [114].

Надо отметить, что в том и в другом случаях фазовые траектории выходят на устойчивый предельный цикл или аттрактор. Дадим определение устойчивости предельного цикла [115].

Напомним, предельный цикл является устойчивым, если существует такая область фазового пространства, которая содержит этот предельный цикл, что все фазовые траектории, начинающиеся в этой области, при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к предельному циклу. В противном случае предельный цикл называется неустойчивым.

Действительно, фазовые траектории при $t \rightarrow \infty$ стремятся к предельному циклу изнутри [107]. Если начальную точку взять вне предельного цикла, то фазовые траектории стремятся к предельному циклу извне (рисунок 1.23).

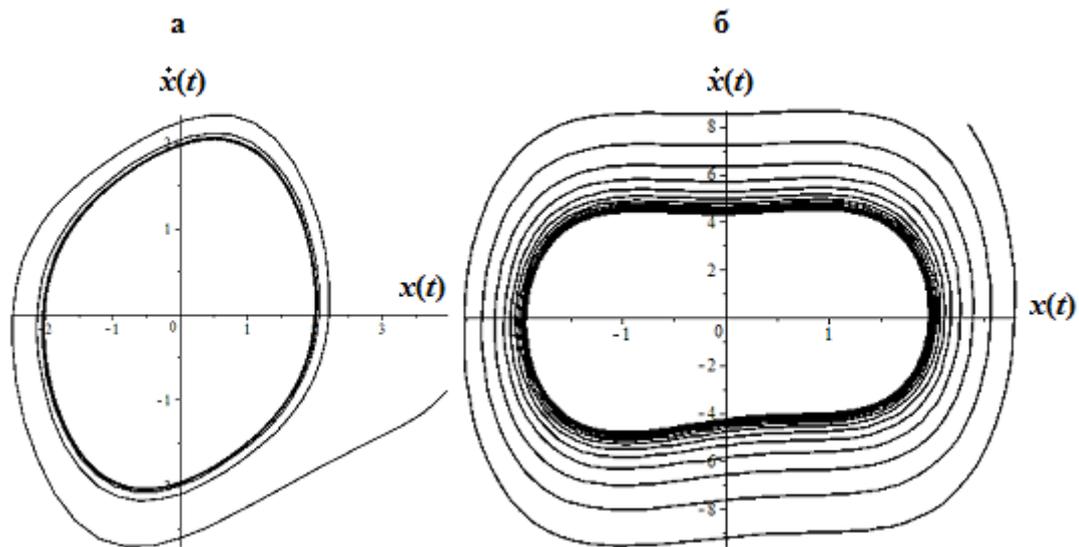


Рисунок 1.23 — Фазовая траектория (а) с учетом параметров:

$\alpha = 2, \beta = 1, \tau = 0.15, \xi = 0.2, (x_0, y_0) = (3.96323, -0.8901)$ и фазовая траектория (б) с учетом параметров: $\alpha = 1.5, \beta = 1, \tau = 0.015, \xi = 4, (x_0, y_0) = (2.35028, 8.075)$

Рисунок 1.23а и рисунок 1.23б соответствуют рисункам из работы [107]. Видно, что в обоих случаях мы имеем дело с устойчивым предельным циклом или аттрактором.

Рассмотрим случай фрактального осциллятора Ван-дер-Поля, характеризующийся несоизмеримой системой (1.75), в которой $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$ и $\gamma = 1/10$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), \\ \partial_{0t}^{0.5} x_2(\tau) &= -x_1(t) - \xi(x_1^2(t) - 1)x_2(t).\end{aligned}\tag{1.78}$$

С учетом (1.76) характеристическое уравнение для системы (1.78) имеет вид:

$$\lambda^{15} - \xi\lambda^{10} + 1 = 0.\tag{1.79}$$

Пусть управляющий параметр имеет значение $\xi = 4$, тогда два корня $\lambda_1 = 1.315220259 + 1.345192828 \cdot 10^{-11}I$ и $\lambda_{11} = 0.8832014783 - 2.992970998 \cdot 10^{-10}I$ характеристического уравнения (1.79) не удовлетворяют условиям теоремы 1.2, т.е. выполняется неравенство

$$|\arg(\lambda_{1,11})| < \frac{\pi}{20}.$$

так как действительные части корней λ_1 и λ_{11} положительны, то точка состояния равновесия системы (1.78) является неустойчивым фокусом. Однако фазовая траектория стремится к предельному устойчивому циклу [107].

Рассмотрим случай, когда в соизмеримой системе (1.75) действует внешняя периодическая сила вида: $f(t) = \delta \sin(\omega t)$. Система записывается так:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1(t) - \xi(x_1^2(t) - 1)x_2(t) + \delta \sin(\omega t).\end{aligned}\tag{1.80}$$

Положим в системе (1.80) следующие значения параметров: $\xi = 0.2$, $\delta = 0.4$, $\omega = 1$, $t = 1$. Следовательно, мы получаем точку равновесия системы $E = (-0.336, 0)$, которая будет неустойчивым фокусом. В случае несоизмеримой системы $\alpha = 1.2$ и $\beta = 0.2$ мы получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^{12} - 0.4\lambda^2 + 1 = 0.\tag{1.81}$$

Все корни уравнения (1.81) удовлетворяют условию (1.74), поэтому точка равновесия E асимптотически устойчивая. Необходимо заметить, что фазовая траектория выходит на устойчивый предельный цикл (рисунок 1.24).

Надо отметить, что на рисунке 1.24б предельный цикл смещен вдоль оси абсцисс на 0.2 единиц по сравнению с рисунком 1.24а, но форма предельного цикла остается неизменной. Это еще раз подтверждает независимость автоколебаний от начальных условий.

Рассмотрим фрактальный осциллятор Дуффинга в случае, когда $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. Это приводит нас к следующей соизмеримой системе:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1(t) - x_1^3(t) - ax_2(t) + \delta \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{1.82}$$

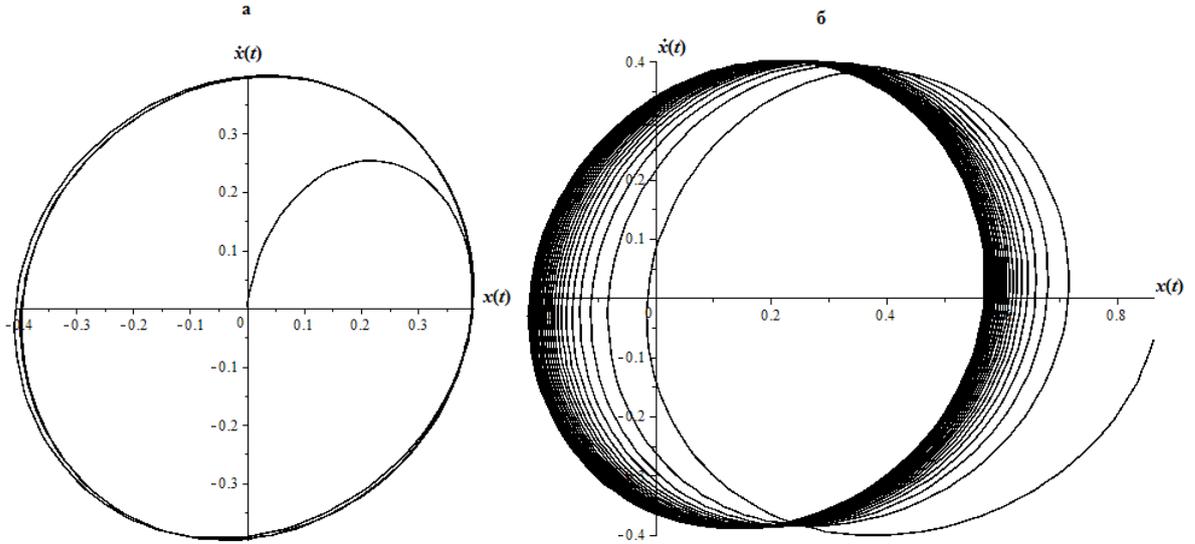


Рисунок 1.24 — Фазовая траектория (а) с начальной точкой внутри предельного цикла $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и фазовая траектория (б) с начальной точкой вне предельного цикла:

$$(x_0, y_0) = (0.862, -0.67)$$

Матрица Якоби для системы (1.82) имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_1^{*2} & -a \end{bmatrix} = 0, \quad (1.83)$$

Если положить значения параметров $a = 0.15$, $\delta = 0.3$, $\omega = 1$, $t = 1$ как в работе [88], то система имеет три точки состояния равновесия: $E_1 = (1.07288371, 0)$, $E_2 = (-0.90615851, 0)$, $E_3 = (-0.16672520, 0)$. Для первой точки E_1 собственные значения имеют вид $\lambda_{1,2} = -0.075 \pm 1.487624I$, для второй точки E_2 : $\lambda_1 \approx 1.8547928$, $\lambda_2 \approx -2.004792873$, для третьей точки E_3 : $\lambda_1 \approx 1.1521106$, $\lambda_2 \approx -1.3021106$. Точка равновесия системы E_1 асимптотически устойчива, так как выполняется условие: $|\arg(\lambda_{1,2})| < \frac{\pi}{2}$. Для точек E_2 и E_3 условие асимптотической устойчивости выполняется только для вторых собственных значений. Поэтому E_1 — устойчивый узел, а точки E_2 и E_3 — седловые точки. Наличие корней характеристического уравнения, которые попадают в неустойчивые области достаточно, чтобы система (1.83) имела хаотическое поведение [107].

В случае несоизмеримой системы при значении параметров $\alpha = 2$, $\beta = 0.6$ мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{0.6} x_1(\tau) &= x_2(t), \\ \partial_{0t}^{1.4} x_2(\tau) &= x_1(t) - x_1^3(t) - ax_2(t) + \delta \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Если положить параметры $a = 0.15$, $\delta = 0.3$, $\omega = 1$, $t = 1$, то мы имеем известные нам три точки состояния равновесия: $E_1 = (1.07288371, 0)$, $E_2 = (-0.90615851, 0)$, $E_3 = (-0.16672520, 0)$. Составим для каждой точки характеристическое уравнение. Заметим, что $\gamma = 1/10$. Для точки E_1 имеем:

$$\lambda^{20} + \frac{3}{20} \lambda^{14} - 2.453238265 = 0. \quad (1.85)$$

Характеристическое уравнение (1.85) имеет неустойчивый корень $\lambda_2 \approx 1.04$, потому что выполняется неравенство: $|\arg(\lambda_2)| < \frac{\pi}{20}$. Можно заключить, что точка равновесия системы E_1 – неустойчивый узел.

Для точки равновесия системы E_2 соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^{20} + \frac{3}{20}\lambda^{14} - 1.463369736 = 0. \quad (1.86)$$

Характеристическое уравнение (1.86) имеет один неустойчивый корень $\lambda_2 \approx 1.012$, поэтому точка E_2 тоже является неустойчивым узлом.

Для точки равновесия системы E_3 характеристическое уравнение представимо в виде:

$$\lambda^{20} + \frac{3}{20}\lambda^{14} + 0.9166081218 = 0. \quad (1.87)$$

Все корни характеристического уравнения удовлетворяют условию теоремы 2.4, поэтому точка E_3 является устойчивым фокусом.

Отметим, что фрактальный осциллятор Дуффинга с вынужденной силой может обладать устойчивым предельным циклом. Действительно возьмем начальные точки внутри $(x_0, y_0) = (1.6305, -0.6498)$ и вне предельного цикла $(x_0, y_0) = (0.47115, -2.43045)$ с учетом параметров $\alpha = 2$, $\beta = 0.6$, $\tau = \frac{\pi}{100}$, $a = 0.15$, $\delta = 0.3$, $\omega = 1$ и построим фазовые траектории (рисунок 1.25).

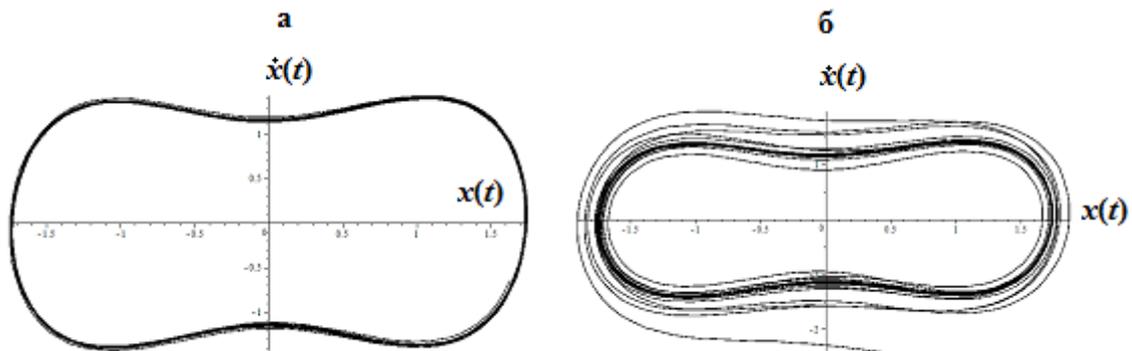


Рисунок 1.25 — Фазовая траектория (а) с начальной точкой $(x_0, y_0) = (1.6305, -0.6498)$ и фазовая траектория (б) с начальной точкой $(x_0, y_0) = (0.47115, -2.43045)$

1.8.6 Выводы по подразделу

Численный анализ нелинейных осцилляторов показал, что при определенных значениях управляющих параметров и функциональных зависимостей дробных показателей $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ могут появляться колебательные режимы, которые присущи другим нелинейным осцилляторам. Для эрдитарного осциллятора Ван дер Поля, совершающий свободные колебания, были получены осциллограмма и фазовая траектория, которые соответствуют незатухающим

колебаниям. Это является важным результатом, так как ранее считалось, что введение дробных производных в осцилляционные уравнения приводят к диссипации энергии колебательной системы [89].

Исследование конечно-разностных схем для решения нелинейных эредитарных уравнений осцилляторов показал, что для модельных расчетов можно использовать два семейства конечно-разностных схем (1.59)-(1.70). Более точны схемы, которые были построены на основе аппроксимаций дифференциальных операторов дробных производных по формулам (1.55)-(1.57). В общем случае схемы (1.59)-(1.70) имеют первый порядок точности. Для улучшения точности конечно разностных схем можно попытаться построить их, например, с помощью правила Ричардсона [98].

В работе был проведен количественный анализ решений нелинейных эредитарных осцилляторов, разработаны и зарегистрированы две компьютерные программы для ЭВМ (HNO и HLO). Дальнейшее продолжение работы – качественный анализ решений нелинейных эредитарных осцилляторов, построение карт динамических режимов, показателей Ляпунова и сечений Пуанкаре, а также определение и классификация точек покоя и их устойчивость для случая дробных переменных порядков производных, входящих в исходное уравнение.

1.9 Исследование колебательных систем с памятью

Процессы с памятью получили математическое описание в работах итальянского математика Вито Вольтерра [85, 135], однако уже тогда были известны эффекты усталости материалов, магнитного и электрического гистерезиса, запаздывания волн и другие процессы с памятью. В работе [85] В. Вольтерра ввел понятие эредитарности, которое характеризует свойство системы или процесса сохранять память о своем прошлом, т.е. текущее состояние системы зависит от конечного числа предыдущих состояний и рассмотрен эредитарный осциллятор без трения и внешнего воздействия. Эредитарный осциллятор описывался интегро-дифференциальным уравнением с разностным ядром, которое называют функцией памяти. Для такого осциллятора было выведено соотношение для полной механической энергии, в котором появилось дополнительное слагаемое, отвечающее за диссипацию энергии. Поэтому колебания эредитарного осциллятора в отличие от классического гармонического осциллятора являются затухающими, а фазовые траектории — закручивающимися спиралями.

В работе [117] указывается на два предельных случая, которые связаны с выбором функции памяти. Например, в случае когда функция памяти — дельта функция, то рассматриваемый процесс не обладает памятью, а если функция памяти — функция Хевисайда, то рассматриваемый процесс обладает полной памятью. Однако, например, если функция памяти имеет степенной вид, то рассматриваемый процесс — это процесс с частичной "потерей памяти". Такие процессы представляют наибольший интерес, так как приближены к реальным процессам.

Модельные интегро-дифференциальные уравнения со степенными функциями памяти можно естественным образом переписать в терминах производных дробных порядков, которые достаточно хорошо изучены в рамках дробного исчисления [118, 119]. С другой стороны наличие степенных законов в природе и ее фрактальных свойств, позволяют нам выделить из класса эредитарных процессов класс фрактальных процессов. Тогда в качестве модельных уравнений фрактальных процессов будут выступать как раз уравнения с производными дробных порядков, причем эти порядки будут связаны с фрактальной размерностью среды, в которой протекают рассматриваемые процессы. Одним из таких процессов можно считать фрактальный колебательный процесс — фрактальный осциллятор.

В работах [120, 121, 122, 123] были исследованы различные фрактальные осцилляторы, однако эти исследования носят частный характер, многие вопросы остались без рассмотрения. Например, вопросы существования и единственности решения, не рассмотрены свойства численных методов и т.д. На наш взгляд более полное исследование дано в монографиях [122, 123], однако и здесь остаются неизученными некоторые вопросы.

Эта работа имеет цель исследовать широкий класс осцилляторов с памятью (фрактальных осцилляторов), причем этот класс в общем случае охватывает нелинейные фрактальные осцилляторы.

1.9.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующее эредитарное уравнение:

$$\int_0^t K_1(t-\eta) \ddot{x}(\eta) d\eta + \lambda(x(t), t) \int_0^t K_2(t-\eta) \dot{x}(\eta) d\eta = f(x(t), t), \quad (1.88)$$

где $K_1(t-\eta)$, $K_2(t-\eta)$ — разностные ядра, которые определяют функции памяти или эредитарности, $x(t)$ — функция смещения, $\lambda(x(t), t)$ — непрерывная нелинейная функция, которая характеризует трение, $f(x(t), t)$ — непрерывная нелинейная функция, которая характеризует внешнее воздействие, $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$, $\ddot{x}(t) = d^2x(t)/dt^2$ — производная первого и второго порядков.

Интегро-дифференциальное уравнение (1.88) описывает широкий класс эредитарных осцилляторов, причем, если функция $f(x(t), t)$ линейная, а функция $\lambda(x(t), t)$ зависит только от t или является постоянной, то мы получаем класс линейных эредитарных осцилляторов, а если функции $f(x(t), t)$ и $\lambda(x(t), t)$ нелинейные, то мы приходим к классу нелинейных эредитарных осцилляторов. Например, если функция $\lambda(x(t), t)$ четная, а функция $f(x(t), t)$ нечетная функция по переменной x , то мы приходим к нелинейным фрактальным автогенераторам типа Ван дер Поля [124, 125, 126].

Во введении мы говорили о важности степенных законов при моделировании процессов и явлений, поэтому выберем функции памяти в уравнении (1.88) следующими:

$$K_1(t-\eta) = \frac{\eta^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, K_2(t-\eta) = \frac{\eta^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}, 1 < \beta < 2, 0 < \gamma < 1, \quad (1.89)$$

Заметим, что в работе [117] отмечено, что если функцию памяти выбрать в виде $K(t - \eta) = \omega \delta(t - \eta)$, где ω – положительная константа, $\delta(\cdot)$ – функция Дирака, то мы получим отсутствие памяти по аналогии с марковским процессом. Случай, когда в динамической системе функция памяти имеет вид $K(t - \eta) = t - H(t - \eta)$, где $H(\cdot)$ – функция Хевисайда, приводит к системам с полным наличием памяти. Степенной характер функции памяти в виде (1.89) приводит к динамическим системам с "частичной потерей памяти".

Выбор степенной функции в виде (1.89) обусловлен возможностью перехода к производным дробного порядка и не является ограниченным. Так, если подставить функции (1.89) в уравнение (1.88) и принять во внимание определение производной дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(3 - \beta)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\eta) d\eta}{(t - \eta)^{\beta-1}}, \partial_{0t}^{\gamma} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2 - \gamma)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\eta) d\eta}{(t - \eta)^{\gamma}}, \quad (1.90)$$

, то мы приходим к следующему уравнению:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) + \lambda(x(t), t) \partial_{0t}^{\gamma} x(\eta) = f(x(t), t), \quad (1.91)$$

которое описывает один из классов эредитарных осцилляторов – фрактальные осцилляторы.

Для уравнения (1.91) справедливы традиционные начальные условия:

$$x(0) = \alpha_1, \dot{x}(0) = \alpha_2, \quad (1.92)$$

где α_1, α_2 – заданные константы.

Задача (1.91) и (1.92) является задачей Коши, которая описывает класс фрактальных осцилляторов с постоянной эредитарностью или памятью.

Отметим, что дробные параметры β и γ в уравнении (1.91) могут быть связаны со свойствами среды, например, с фрактальной размерностью и определяются с помощью экспериментальных данных.

Необходимо также отметить, что выбор функции памяти не ограничивается степенной зависимостью, могут быть другие зависимости, которые фактически приводят нас к новым определениям производной дробного порядка. С другой стороны мы можем и не переходить к производным дробных порядков, а работать с интегро-дифференциальными уравнениями. Выбор функции памяти должен исходить из конкретных условий исследуемой задачи.

На рисунке 1.26 приведена условная классификация эредитарных осцилляторов. Мы будем исследовать класс осцилляторов с постоянной памятью, т.е. $\beta, \gamma = \text{const}$.

Условность классификации на рисунке 1.26 обусловлена тем, что существуют другие фрактальные осцилляторы, например, активные фрактальные осцилляторы (АФО), которые не исследуются в этой статье.

Активные фрактальные осцилляторы представляют собой радиоэлектронный автогенератор с дробной цепью обратной связи. Математическое описание АФО дается уравнением с классическими целочисленными производными, но с дробным интегралом Римана-Лиувилля в его правой части [127].

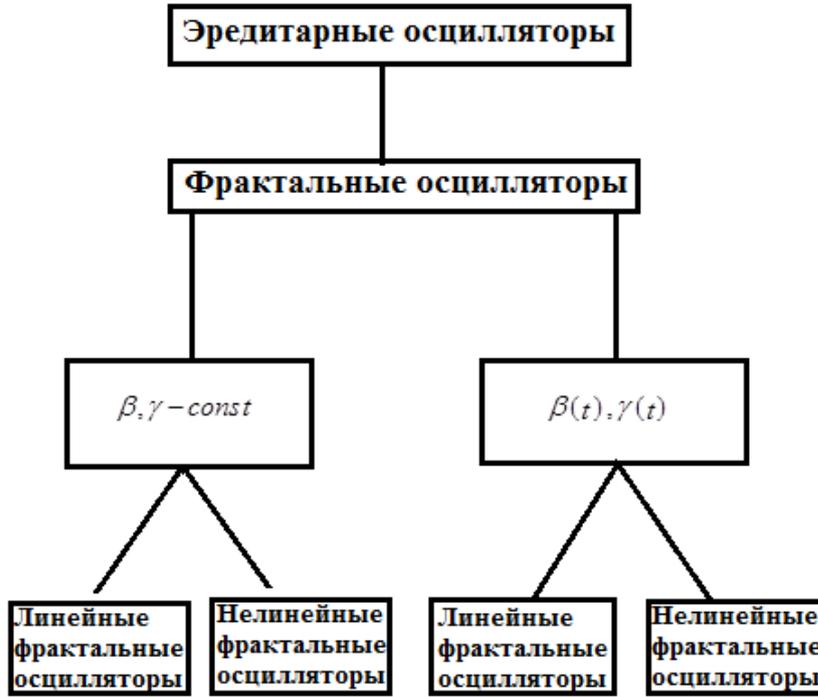


Рисунок 1.26 — Классификация эредитарных осцилляторов

1.9.2 Существование и единственность задачи Коши для широкого класса осцилляторов с памятью

Обоснование существования и единственности решения задачи Коши проводится различными методами, но обычно используется принцип сжимающих отображений (теорема о неподвижной точке), который рассматривается в рамках функционального анализа. Следуя методике работы [128], мы покажем, что задача Коши (1.91) и (1.92) имеет единственное решение.

Пусть $f(x(t), t)$ и $\lambda(x(t), t)$ непрерывные функции, такие что $f, \lambda : [0, T] \times E \rightarrow E$, и $(E, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, порожденное нормой $\|\cdot\|$. Обозначим $([0, T], E) \rightarrow E$ — пространство всех непрерывных функций, определенных на $[0, T] \rightarrow E$, порожденное нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. Общее решение задачи Коши (1.91) и (1.92) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \xi)^{\beta-1} f(x(\xi), \xi) d\xi - \\
 & - \frac{1}{\Gamma(\beta - \gamma)} \int_0^t \lambda(x(\xi), \xi) (t - \xi)^{\beta-\gamma-1} x(\xi) d\xi - \alpha_1 - \alpha_2 t.
 \end{aligned} \tag{1.93}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (1.91) и (1.92). Из уравнения (1.91) мы имеем:

$$\partial_{0t}^\beta x(\xi) = f(x(t), t) - \lambda(x(t), t) \partial_{0t}^\gamma x(\xi), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.94}$$

С помощью свойства композиции дробных дифференциальных операторов уравнение (1.94) перепишем в виде:

$$I_{0t}^{2-\beta} \ddot{x}(\xi) = f(x(t), t) - \lambda(x(t), t) \partial_{0t}^\gamma x(\xi). \quad (1.95)$$

Действуя оператором $I_{0t}^{\beta-2}$ на правую и левую части уравнения (1.95) и дважды интегрируя от 0 до t , мы получим:

$$x(t) = I_{0t}^\beta f(x(\xi), \xi) - I_{0t}^{\beta-\gamma} \lambda(x(\xi), \xi) x(\xi) - c_1 - c_2 t. \quad (1.96)$$

При $t = 0$ из начальных условий (1.92), мы получим, что константы интегрирования: $c_1 = \alpha_1, c_2 = \alpha_2$ и отсюда следует общее решение (1.93).

Лемма 1 доказана. □

Введем оператор $A(x) : C([0, T], E) \rightarrow C([0, T], E)$, такой что

$$A(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} f(x(\xi), \xi) d\xi - \quad (1.97)$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^t \lambda(x(\xi), \xi) (t-\xi)^{\beta-\gamma-1} x(\xi) d\xi - \alpha_1 - \alpha_2 t.$$

Введем следующие условия:

- а) Функция $f(x(t), t)$ удовлетворяет условию по $x(t)$:

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L \|x - y\|, L > 0, x, y \in E, t \in [0, T] \quad (1.98)$$

- б) Пусть d и r два положительных действительных чисел, таких что $0 < d < 1$ и

$$\frac{MT^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} + \frac{LT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \leq d, \frac{NT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \alpha_1 + \alpha_2 T \leq (1-d)r, \quad (1.99)$$

где $N = \|f(0, t)\| = \sup_{t \in [0, T]} |f(0, t)|, 0 < \lambda(x, t) \leq M$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если выполнены условия (1.98) и (1.99), тогда задача Коши (1.91) и (1.92) имеет единственное решение в пространстве $(C[0, T], E)$.

Доказательство. Покажем, что оператор (1.97) имеет фиксированную точку в шаре $B_r = \{x \in E, \|x\| \leq r\}$. Пусть $x \in B_r$. Имеем

$$\|A(x)\| = \left\| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} f(x(\xi), \xi) d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^t \lambda(x(\xi), \xi) (t-\xi)^{\beta-\gamma-1} x(\xi) d\xi - \alpha_1 - \alpha_2 t \right\|.$$

Перейдем к неравенству

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} \|f(x(\xi), \xi) - f(0, \xi)\| d\xi + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} \|f(0, \xi)\| d\xi + \frac{M}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-\gamma-1} \|x(\xi)\| d\xi + \\ &+ \alpha_1 + \alpha_2 T. \end{aligned}$$

С учетом условия (1.98) при $y = 0$ мы приходим к неравенству:

$$\|A(x)\| \leq \frac{LT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|x\| + \frac{NT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{MT^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \|x\| + \alpha_1 + \alpha_2 T,$$

а с учетом условия (1.99) получим следующее неравенство:

$$A(x) \leq dr + (1 - dr),$$

откуда следует включение $AB_r \subset B_r$. Следовательно, оператор (1.97) отображает B_r в себя.

Покажем, что оператор (1.97) является сжимающим в B_r . Пусть $x, y \in B_r$

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} \|f(x(\xi), \xi) - f(y(\xi), \xi)\| d\xi + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^t \lambda(x(\xi), \xi) (t-\xi)^{\beta-\gamma-1} \|x(\xi) - y(\xi)\| d\xi. \end{aligned}$$

С учетом условия (1.99), имеем:

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \frac{LT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|x - y\| + \frac{MT^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \|x - y\| \leq d \|x - y\|.$$

Отсюда следует, что оператор (1.97) является сжимающим, поэтому имеет единственную неподвижную точку, которая является решением задачи Коши (1.91), (1.92).

Теорема 1 доказана.

Замечание. Заметим, что в случае, когда β и γ являются функциями от времени t , то обоснование существования и единственности задач Коши (1.91)-(1.92) значительно усложняется, так как не выполняется композиция дробных операторов (1.90). В некоторых работах, например, [129] авторы ошибочно считают выполнение композиции (1.90) и потом используют принцип сжимающих отображений. Поэтому необходимо либо вводит другой оператор дробного дифференцирования либо попытаться оценить дополнительные слагаемые, которые будут появляться в результате действия дробных операторов друг на друга [130, 131].

1.9.3 Явная конечно-разностная схема. Устойчивость и сходимость

Сложность нахождения решения задачи Коши (1.91) и (1.92), как мы показали выше (Лемма 1), упирается в вычисление интегралов в соотношении (1.93) в зависимости от вида нелинейных функций $\lambda(x(t), t) > 0$ и $f(x(t), t)$. Как правило, такие интегралы точно не вычисляются и поэтому необходимо использовать численные методы, например, теорию конечно-разностных схем [132].

Для численного счета в случае, когда вместо дробных производных Герасимова-Капуто в исходном модельном уравнении стоят дробные производные Римана-Лиувилля, конечно-разностные схемы можно построить с помощью разностного аналога — дискретной дробной производной Грюнвальда-Летникова [119]. В монографии словакского математика Иво Петраса [123], были рассмотрены различные фрактальные нелинейные осцилляторы, которые были описаны с помощью уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля, там же приводятся их численные решения, полученные на основе аппроксимации Грюнвальда-Летникова. Однако в этом случае для исходных модельных уравнений необходимо ставить нелокальные начальные условия, что затрудняет физическую интерпретацию результатов. Поэтому на наш взгляд пока самым оптимальным является выбор производных Герасимова-Капуто в модельном уравнении, так как для них справедливы традиционные локальные условия.

Замечание. Отметим, что в случае, когда в уравнении ((1.91)) коэффициент трения λ является константой, а в правой части функция f линейная, то решение задачи Коши (1.91) и (1.92) можно получить с помощью интегрального преобразования Лапласа в виде специальных функций типа Миттаг-Леффлера [?].

В общем случае для решения задачи Коши (1.91) и (1.92) мы можем, например, с помощью аппроксимаций дробных операторов (1.90) строить нелокальные конечно-разностные схемы первого или второго порядка точности.

В монографии мы остановимся на построении явных конечно-разностных схем, так как их проще реализовать в любой компьютерной программе, однако в этом случае нам придется рассмотреть вопросы их устойчивости и сходимости.

Пусть для достижения нужной гладкости при построении явной конечно-разностной схемы функция решения $x(t) \in C^3(0, T)$, функция, отвечающая за трение $\lambda(x(t), t) \in C(0, T)$, а функция $f(x(t), t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$ по переменной x :

$$|f(x_1(t), t) - f(x_2(t), t)| \leq L|x_1(t) - x_2(t)|. \quad (1.100)$$

Напомним, что условие Липшица (1.100) означает, что функция f принадлежит классу абсолютно непрерывных функций на интервале $(0, T)$, т.е. $f \in AC(0, T)$.

Разобьем временной интервал $[0, T]$ на N равных частей с постоянным шагом $\tau = T/N$. Функция решения $x(t)$ перейдет в сеточную функцию $x(t_k) = x_k$, где $t_k = k\tau, k = 1, \dots, N - 1$.

Аппроксимации производных дробного порядка в уравнении (1.91) имеют вид:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\xi) \approx A \sum_{j=0}^{k-1} a_j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}), \quad (1.101)$$

где $A = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}$, $a_j = (j+1)^{2-\beta} - j^{2-\beta}$,

$$\partial_{0t}^{\gamma} x(\xi) \approx B\lambda_k \sum_{j=0}^{k-1} b_j (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}), \quad b_j = (j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}. \quad (1.102)$$

где $B = \frac{\tau^{-\gamma}}{2\Gamma(2-\gamma)}$ и функция $\lambda_k = \lambda(x(t_k), t_k)$.

Подставляя аппроксимации (1.101) и (1.102) в исходное уравнение (1.91) приходим к следующей дискретной задаче Коши:

$$A \sum_{j=0}^{k-1} a_j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) + \quad (1.103)$$

$$+ B\lambda_k \sum_{j=0}^{k-1} b_j (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}) = f_k,$$

$$x_0 = \alpha_1, x_1 = \alpha_2 + \tau\alpha_1 \quad (1.104)$$

Для дискретной задаче Коши (1.103) и (1.104) справедлива следующая явная конечно-разностная схема:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & \frac{1}{A + \lambda_k B} (2Ax_k - (A - \lambda_k B)x_{k-1} + f_k) - \\ & - \frac{A}{A + \lambda_k B} \sum_{j=1}^{k-1} a_j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \\ & - \frac{B\lambda_k}{A + \lambda_k B} \sum_{j=1}^{k-1} b_j (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Явная конечно-разностная схема (1.105) нуждается в исследовании на устойчивость и сходимость, потому что существует ограничение на шаг τ . Заметим, что коэффициенты схемы (1.105) обладают свойствами, которые можно оформить в виде следующей вспомогательной леммы.

Лемма 2. Коэффициенты явной конечно-разностной схемы (1.105) обладают следующими свойствами:

- а) $\sum_{j=0}^{k-1} a_j = k^{2-\beta}$, $\sum_{j=0}^{k-1} b_j = k^{1-\gamma}$,
- б) $1 = a_0 > a_1 > \dots > 0$, $1 = b_0 > b_1 > \dots > 0$,
- в) $A \geq 0$, $B \geq 0$.

Доказательство. Первое свойство вытекает из определения:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} a_j &= \sum_{j=0}^{k-1} \left[(j+1)^{2-\beta} - j^{2-\beta} \right] = 1 - 0 + 2^{2-\beta} - 1 + 3^{2-\beta} - 2^{2-\beta} + \dots + \\ &\quad + (k-1)^{2-\beta} + k^{2-\beta} - (k-1)^{2-\beta} = k^{2-\beta} \\ \sum_{j=0}^{k-1} b_j &= \sum_{j=0}^{k-1} \left[(j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma} \right] = 1 - 0 + 2^{1-\gamma} - 1 + 3^{1-\gamma} - 2^{1-\gamma} \dots + \\ &\quad + (k-1)^{1-\gamma} + k^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma} = k^{1-\gamma}\end{aligned}$$

Второе условие докажем следующим образом. Введем в рассмотрение функции: $\phi(z) = (z+1)^{2-\beta} - z^{2-\beta}$ и $\eta(z) = (z+1)^{1-\gamma} - z^{1-\gamma}$, где $z > 0$. Эти функции являются монотонно убывающими. Действительно, возьмем производные по x от этих функций. Получим:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (2-\beta) \left[(x+1)^{1-\beta} - x^{1-\beta} \right] < 0, \\ \eta'(x) &= (1-\gamma) \left[(x+1)^{1-\gamma} - x^{1-\gamma} \right] < 0.\end{aligned}$$

Третье свойство вытекает из свойства гамма-функции. Известно, что гамма функция $\Gamma(z)$ монотонно убывающая функция на интервале $0 < z < 1$, следовательно функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$ монотонно возрастающая функция, причем $0 < \frac{1}{\Gamma(z)} < 1$. Так как $\tau > 0$, то мы приходим к тому что $A \geq 0, B \geq 0$.

Лемма 2 доказана.

Исследуем теперь порядок аппроксимации дробных операторов $\partial_{0t}^\beta x(\xi)$ и $\partial_{0t}^\gamma x(\xi)$. Пусть $\bar{\partial}_{0t}^\beta x(\xi)$ и $\bar{\partial}_{0t}^\gamma x(\xi)$ – операторы аппроксимации. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Аппроксимации $\bar{\partial}_{0t}^\beta x(\xi)$ и $\bar{\partial}_{0t}^\gamma x(\xi)$ операторов Герасимова-Капуто $\partial_{0t}^\beta x(\xi)$ and $\partial_{0t}^\gamma x(\xi)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\left| \partial_{0t}^\beta x(\xi) - \bar{\partial}_{0t}^\beta x(\xi) \right| \leq C_1 \tau, \quad \left| \partial_{0t}^\gamma x(\xi) - \bar{\partial}_{0t}^\gamma x(\xi) \right| \leq C_2 \tau, \quad (1.106)$$

где C_1 и C_2 – константы, которые не зависят от шага τ .

Доказательство. Используя свойства Леммы 2 и определений (1.90):

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{0t}^\beta x(\xi) &= \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{j=0}^{k-1} a_j \left[\ddot{x}(t-j\tau) + O(\tau^2) \right] = \\ &= \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{j=0}^{k-1} a_j \ddot{x}(t-j\tau) + \frac{\tau^{2-\beta} k^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} O(\tau^2) = \\ &= \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{j=0}^{k-1} a_j \ddot{x}(t-j\tau) + \frac{t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} O(\tau^2) = \\ &= \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{j=0}^{k-1} a_j \ddot{x}(t-j\tau) + O(\tau^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{0t}^\beta x(\xi) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \eta^{1-\beta} \ddot{x}(t-\eta) d\eta = \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{j=0}^{k-1} a_j \ddot{x}(t-\xi_j), \xi_j \in [j\tau, (j+1)\tau]. \\
\left| \partial_{0t}^\beta x(\xi) - \bar{\partial}_{0t}^\beta x(\xi) \right| &= \left| \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{j=0}^{k-1} a_j [\ddot{x}(t-j\tau) - \ddot{x}(t-\xi_j)] + O(\tau^2) \right| = \\
&= \left| \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cdot O(\tau) + O(\tau^2) \right| = \left| \frac{\tau^{2-\beta} k^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} O(\tau) + O(\tau^2) \right| = \\
&O(\tau) + O(\tau^2) = O(\tau).
\end{aligned}$$

Аналогично, мы можем показать вторую оценку в лемме (1.106).

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_{0t}^\gamma x(\xi) &= \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k-1} b_j [\dot{x}(t-j\tau) + O(\tau)] = \\
&= \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k-1} b_j \dot{x}(t-j\tau) + \frac{\tau^{1-\gamma} k^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} O(\tau) = \\
&= \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k-1} b_j \dot{x}(t-j\tau) + \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} O(\tau^2) = \\
&= \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k-1} b_j \dot{x}(t-j\tau) + O(\tau). \\
\partial_{0t}^\gamma x(\xi) &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \eta^{-\gamma} \dot{x}(t-\eta) d\eta = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \sum_{j=0}^{k-1} b_j \dot{x}(t-\xi_j), \xi_j \in [j\tau, (j+1)\tau]. \\
\left| \partial_{0t}^\gamma x(\xi) - \bar{\partial}_{0t}^\gamma x(\xi) \right| &= \left| \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k-1} b_j [\dot{x}(t-j\tau) - \dot{x}(t-\xi_j)] + O(\tau) \right| = \\
&= \left| \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot O(\tau) + O(\tau) \right| = \left| \frac{\tau^{1-\gamma} k^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} O(\tau) + O(\tau) \right| = \\
&= O(\tau) + O(\tau) = O(\tau).
\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Замечание. Можно показать с помощью Леммы 3, что явная конечно-разностная (1.105) имеет ошибку $\varepsilon = O(\tau)$. Мы будем этот факт учитывать при оценке вычислительной точности численного метода.

Формулу (1.105) удобно представить в матричном виде:

$$X_{k+1} = MX_k + F_k, \quad (1.107)$$

$$X_{k+1} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T, X_k = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})^T, \\ F_k = \left(f_0, \frac{f_1}{A + \lambda_1 B}, \dots, \frac{f_{k-1}}{A + \lambda_{k-1} B} \right)^T, f_0 = \tau \alpha_2,$$

где матрица в (1.107) $M = (m_{ij})$, $i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, N-1$:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, j \geq i+1, \\ \frac{A(2-a_i) - B\lambda_{i-1}b_1}{A + \lambda_{i-1}B}, j = i = 3, \dots, N-1, \\ \frac{-A(a_{i-j+1} - 2a_{i-j} + a_{i-j-1}) - B\lambda_{i-1}(b_{i-j+1} - b_{i-j-1})}{A + \lambda_{i-1}B}, j \leq i-1, \end{cases} \quad (1.108)$$

$$m_{1,1} = 1, m_{2,2} = \frac{2A}{A + \lambda_1 B}, m_{i,1} = \frac{B\lambda_{i-1}b_{i-2} - Aa_{i-2}}{A + \lambda_{i-1}B}, i = 2, \dots, N-1, \\ m_{i,2} = \frac{A(2a_{i-2} - a_{i-3}) + \lambda_{i-1}Bb_{i-3}}{A + \lambda_{i-1}B}, i = 3, \dots, N-1.$$

Для матричного уравнения (1.107) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Явная конечно-разностная схема (1.105) сходится с первым порядком $|\bar{x}_k - x_k| = O(\tau)$, если выполнено условие:

$$\tau \leq \tau_0 = \min \left(1, \left(\frac{2\Gamma(2-\gamma)}{\|\lambda\|\Gamma(3-\beta)} \right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}} \right). \quad (1.109)$$

где $\|\lambda\| = \max_k |\lambda_k|$ – векторная норма.

Доказательство. Пусть $\bar{X}_k = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{N-2})^T$ – точное решение системы (1.110) и вектор ошибок $e_{k+1} = \bar{X}_{k+1} - X_{k+1}, e_0 = 0$. Тогда система (1.108), с учетом Леммы 2.3, можем записать следующим образом:

$$e_{k+1} = Me_k + F_{e,k} + O(\tau), \quad (1.110)$$

$$F_{e,k} = \frac{1}{A + \lambda_k B} \times \\ \times (0, |f(x_1, t_{k-1}) - f(\bar{x}_1, t_{k-1})|, \dots, |f(x_{k-1}, t_{k-1}) - f(\bar{x}_{k-1}, t_{k-1})|)^T \leq \\ \leq \frac{1}{A + \lambda_k B} (L_0 e_0, L_1 e_1, \dots, L_k e_k) = \Delta F_k e_k, \\ \Delta F_k = \frac{1}{A + \lambda_k B} \text{diag}(L_0, L_1, \dots, L_k)^T.$$

Заметим, что для любого k , выполняется условие $|L_k| \leq L$ (1.100).

Далее введем в рассмотрение норму матрицы M : $\|M\| = \max_i \left(\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij} \right)$:

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left(\begin{array}{l} 1, \\ \left| \frac{\lambda_1 B b_0 - A a_0}{A + \lambda_1 B} \right| + \left| \frac{2A}{A + \lambda_1 B} \right|, \\ \left| \frac{B b_1 \lambda_2 - A a_1}{A + \lambda_2 B} \right| + \left| \frac{A(2a_1 - a_0) + B \lambda_2 b_0}{A + \lambda_2 B} \right| + \left| \frac{A(2 - a_1) - B \lambda_2 b_1}{A + \lambda_2 B} \right|, \\ \left| \frac{B b_2 \lambda_3 - A a_2}{A + \lambda_3 B} \right| + \left| \frac{A(2a_2 - a_1) + B \lambda_3 b_1}{A + \lambda_3 B} \right| + \\ + \left| \frac{A(a_2 - 2a_1 + a_0) - B \lambda_3 (b_0 - b_2)}{A + \lambda_3 B} \right| + \left| \frac{A(2 - a_1) - B \lambda_3 b_1}{A + \lambda_3 B} \right|, \\ \dots \\ \left| \frac{B \lambda_{i-1} b_{i-2} - A a_{i-2}}{A + \lambda_{i-1} B} \right| + \left| \frac{A(2a_{i-2} - a_{i-3}) + \lambda_{i-1} B b_{i-3}}{A + \lambda_{i-1} B} \right| + \dots \\ + \left| \frac{A(a_{i-2} - 2a_{i-3} + a_{i-4}) - \lambda_{i-1} B (b_{i-4} - b_{i-2})}{A + \lambda_{i-1} B} \right| + \\ \left| \frac{A(2 - a_1) - B \lambda_{i-1} b_1}{A + \lambda_{i-1} B} \right| + \dots \end{array} \right) \quad (1.111)$$

Замечание. Заметим, что норма матрицы $\|M\| \leq 3$, это условие можно получить непосредственно с помощью несложных вычислений (1.111) и с учетом Леммы 2., а также, что все диагональные элементы матрицы M положительны, если выполнено условие $A \geq \|\lambda\|B$. Например, для второй строки в норме (1.111): $\frac{2A}{A + \lambda_1 B} \geq 0$. Пусть $A \geq \lambda_1 B$, тогда

$$\frac{A - \lambda_1 B}{A + \lambda_1 B} + \frac{2A}{A + \lambda_1 B} = \frac{3A - \lambda_1 B}{A + \lambda_1 B} = 3 - \frac{4\lambda_1 B}{A + \lambda_1 B} \leq 3 - \frac{4\|\lambda\|B}{A + \|\lambda\|B} \leq 3.$$

Заметим, что согласно неравенству:

$$\left| \frac{\lambda_1 B - A}{A + \lambda_1 B} + \frac{2A}{A + \lambda_1 B} \right| \leq \left| \frac{\lambda_1 B - A}{A + \lambda_1 B} \right| + \left| \frac{2A}{A + \lambda_1 B} \right|,$$

мы приходим к другому неравенству:

$$1 \leq \left| \frac{\lambda_1 B - A}{A + \lambda_1 B} \right| + \left| \frac{2A}{A + \lambda_1 B} \right|.$$

Для третьей строки из нормы (1.111) с учетом $A \geq \lambda_2 B$:

$$\begin{aligned} & \frac{A a_1 - B b_1 \lambda_2}{A + B \lambda_2} + \frac{A(1 - 2a_1) - B \lambda_2}{A + \lambda_2 B} + \frac{A(2 - a_1) - B \lambda_2 b_1}{A + \lambda_2 B} = \\ & = \frac{A(3 - 2a_1) - B \lambda_2 (2b_1 + 1)}{A + \lambda_2 B} \leq \frac{3A - B\|\lambda\| (2b_1 + 1)}{A + \|\lambda\|B} \leq 3 - \frac{B\|\lambda\| (4 + 2b_1)}{A + \|\lambda\|B} \leq 3. \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{B b_1 \lambda_2 - A a_1}{A + B \lambda_2} + \frac{A(2a_1 - 1) + B \lambda_2}{A + \lambda_2 B} + \frac{A(2 - a_1) - B \lambda_2 b_1}{A + \lambda_2 B} \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{B b_1 \lambda_2 - A a_1}{A + B \lambda_2} \right| + \left| \frac{A(2a_1 - 1) + B \lambda_2}{A + \lambda_2 B} \right| + \left| \frac{A(2 - a_1) - B \lambda_2 b_1}{A + \lambda_2 B} \right| \end{aligned}$$

или

$$3 - \frac{2B \lambda_2}{A + \lambda_2 B} \leq \left| \frac{B b_1 \lambda_1 - A a_1}{A + B \lambda_2} \right| + \left| \frac{A(2a_1 - 1) + B \lambda_2}{A + \lambda_2 B} \right| + \left| \frac{A(2 - a_1) - B \lambda_1 b_1}{A + \lambda_2 B} \right|$$

при $\lambda_2 \rightarrow \infty$ или $B \rightarrow \infty$, будем иметь:

$$1 \leq \left| \frac{Bb_1\lambda_1 - Aa_1}{A + Bb_1\lambda_2} \right| + \left| \frac{A(2a_1 - 1) + B\lambda_2}{A + \lambda_2 B} \right| + \left| \frac{A(2 - a_1) - B\lambda_1 b_1}{A + \lambda_2 B} \right|$$

Аналогично, суммы остальных строк не превосходят 3 и больше единицы.

Из уравнения (1.110) для любой константы $C > 0$, независимой от шага τ и для ошибки получаем оценку:

$$\|e_{k+1}\| \leq \|\Delta F_k + M\| \|e_k\| + C\tau \leq \left(3 + \frac{L}{A + \lambda_k B} \right) \|e_k\| + C\tau. \quad (1.112)$$

Введем для соотношения (1.110) следующие обозначения: $s_k = 3 + \frac{L}{A + \lambda_k B}$, $s = C\tau$. Тогда мы получим, следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| &\leq s_k \|e_k\| + s \leq s_k (s_{k-1} \|e_{k-1}\| + s) + s = \\ &= s_k s_{k-1} \|e_{k-1}\| + s (s_k + 1) \leq s_k s_{k-1} (s_{k-2} \|e_{k-2}\| + s) + s (s_k + 1) = \\ &= s_k s_{k-1} s_{k-2} \|e_{k-2}\| + s (s_k s_{k-1} + s_k + 1) \leq \\ &\leq s_k s_{k-1} s_{k-2} (s_{k-3} \|e_{k-3}\| + s) + s (s_k s_{k-1} + s_k + 1) = \\ &= s_k s_{k-1} s_{k-2} s_{k-3} \|e_{k-3}\|_\infty \leq \\ &\leq s_k s_{k-1} s_{k-2} (s_{k-3} \|e_{k-3}\| + s) + s (s_k s_{k-1} + s_k + 1) = \\ &= s_k s_{k-1} s_{k-2} s_{k-3} \|e_{k-3}\| + \\ &+ s (s_k s_{k-1} s_{k-2} + s_k s_{k-1} + s_k + 1) \leq \dots \leq s_k s_{k-1} \cdot \dots \cdot s_{k-r} \|e_{k-r}\| + \\ &+ s (s_k s_{k-1} \cdot \dots \cdot s_{k-r+1} + \dots + s_k + 1). \end{aligned} \quad (1.113)$$

Подставим в оценку (1.113) $r = k - 1$, мы получим:

$$\|e_{k+1}\|_\infty \leq s_k s_{k-1} \cdot \dots \cdot s_1 \|e_1\| + s (s_k s_{k-1} \cdot \dots \cdot s_2 + \dots + s_k + 1) \leq C_0 \|e_0\| + O(\tau).$$

Из второго начального условия (1.104) из которого следует: $\|e_1\| \leq \|e_0\|$ и $C_0 = \prod_{p=1}^k s_p$.

В силу нашего предположения $A \geq \|\lambda\| B$, что равносильно оценке на шаг τ :

$$\tau \leq \left(\frac{2\Gamma(2 - \gamma)}{\|\lambda\| \Gamma(3 - \beta)} \right)^{\frac{1}{\beta - \gamma}}. \quad (1.114)$$

Условие (1.114) начинает работать в случае, когда число обусловленности матрицы M : $\mu(M) \gg 1$, что возникает при достаточно больших значениях λ . В случае, когда число обусловленности $\mu(M)$ мало, то достаточно выбрать шаг $\tau \leq 1$. Поэтому объединяя эти два случая мы приходим к оценке на шаг τ (1.109).

Теорема 2 доказана.

Заметим, что в случае, когда коэффициентом трения λ постоянный, то условие (1.109) переходит в условие [133, 134]:

$$\tau \leq \tau_0 = \min \left(1, \left(\frac{2\Gamma(2-\gamma)}{\lambda\Gamma(3-\beta)} \right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}} \right).$$

Заметим, что в случае $\beta = 2$ и $\gamma = 1$ соотношение (1.109) переходит в известное соотношение для классического осциллятора с трением λ и внешним воздействием f [?, С. 205]:

$$\tau \leq \tau_0 = \min \left(1, \frac{2}{\|\lambda\|} \right).$$

В работе [136] при доказательстве сходимости явной конечно-разностной схемы для дробного интегро-дифференциального уравнения была использована классическая теорема Лакса. Однако, так как явная конечно-разностная схема является нелокальной, то сходимость схемы, на наш взгляд, необходимо доказывать самостоятельно.

Рассмотрим теперь вопросы устойчивости явной конечно разностной схемы (1.105). Пусть Y_k и X_k два различных решения матричного уравнения (1.110) с начальными условиями Y_0 и X_0 . Тогда справедлива теорема.

Теорема 3. Явная конечно-разностная схема (1.105) условно устойчива, если выполнено условие (1.109) и справедлива оценка $|Y_k - X_k| \leq C|Y_0 - X_0|$ для любых k , где $C > 0$ константа, независимая от шага τ .

Доказательство. Введем следующее обозначение: $e_{k+1} = Y_{k+1} - X_{k+1}$. Тогда уравнение (1.110) может быть записано в форме: $e_{k+1} = Me_k + F_{e,k}$. Следуя результатам Теоремы 1, используя следующую оценку:

$$\|M + \Delta F_k\| \leq \left(3 + \frac{L}{A + \lambda_k B} \right) = s_k,$$

мы приходим к оценке:

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| &\leq \|M + \Delta F_k\| \|e_k\| \leq \left(3 + \frac{L}{A + \lambda_k B} \right) \|e_k\| = \\ &= s_k \|e_k\| \leq s_k s_{k-1} \|e_{k-1}\| \leq s_k s_{k-1} s_{k-2} \|e_{k-2}\| \leq \dots \\ &\leq s_k s_{k-1} \cdot \dots \cdot s_{k-r} \|e_{k-r}\|. \end{aligned}$$

Обозначим $r = k - 1$, мы получим $\|e_{k+1}\| \leq C_0 \|e_1\| \leq C_0 \|e_0\|$, $C_0 = \prod_{p=1}^k s_p$. Последнее соотношение следует из второго начального условия (1.92).

Поэтому, если в вектор начальных условий X_0 добавить возмущение, то это не приведет к значительному увеличению ошибки численного решения. Однако для больших значений λ_k , возникает большое число обусловленности $\mu \gg 1$ и необходимо уменьшать шаг дискретизации τ , согласно (1.116), для малых значений λ_k достаточно выбрать $\tau \leq 1$. Тогда система (1.110) устойчива, если выполнено условие (1.109).

Теорема 3 доказана.

1.9.4 Результаты численного моделирования

Рассмотрим работу явной конечно-разностной схемы (1.105) на конкретных простейших примерах. Мы с помощью метода двойного пересчета (правила Рунге), покажем, что вычислительная точность метода при уменьшении шага дискретизации τ стремится к единице, что соответствует результатам Леммы 2.3. Напомним, что правило Рунге для оценки ошибки ξ в общем случае можно записать так:

$$\xi = \frac{\max_i |x(t_i) - x_i|}{2^p - 1}, \quad (1.115)$$

где $\max_i |x(t_i) - x_i|$ – максимальная по абсолютному значению ошибка между точным $x(t_i)$ и численным решением x_i , а p – порядок аппроксимации численного метода. Формула (1.115) справедлива в случае, когда известно точное решение $x(t_i)$ задачи Коши. В случае, когда точное решение задачи Коши не известно, например, в силу ее нелинейности, то можно использовать модификацию правила Рунге, метод двойного пересчета:

$$\xi = \frac{\max_i |x_i - x_{2i}|}{2^p - 1}, \quad (1.116)$$

где x_{2i} – численное решение, полученное на шаге $\tau/2$.

В нашем случае порядок p в формуле (1.116), согласно Лемме 3, равен единице. Чтобы получить оценку для вычислительного порядка точности α можно использовать следующую формулу [137]:

$$\alpha = \frac{\log_2(\xi)}{\log_2(\tau)}. \quad (1.117)$$

Рассмотрим следующий тестовый пример.

Пример Рассмотрим задачу Коши (1.91) и (1.92) со следующими значениями управляющих параметров: непрерывные функции $f(x, t)$ и $\lambda(x, t)$ выберем $f(x(t), t) = -x(t)$, $\lambda(x(t), t) = 2\lambda_0 \cos(t^2)$, $\lambda_0 = 0.1$, $N = 1000$, $T = 20$, $\tau = 0.02$, $\beta = 1.8$, $\gamma = 0.8$, $x(0) = 0.2$, $\dot{x}(0) = 0.1$.

Мы приходим к следующей задаче Коши:

$$\partial_{0t}^{1.8} x(\eta) + 0.2 \cos(x^2(t)) \partial_{0t}^{0.8} x(\eta) + x(t) = 0, t \in [0, 20], \quad (1.118)$$

$$x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1, \quad (1.119)$$

Уравнение (1.118) описывает нелинейные свободные колебания с памятью. Для задачи Коши (1.118) и (1.119) в общем виде конечно-разностная схема (1.105) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & \frac{(2A - 1)x_k - (A - 0.2 \cos(x_k^2)B)x_{k-1}}{A + 0.2 \cos(x_k^2)B} - \\ & - \frac{A}{A + 0.2 \cos(x_k^2)B} \sum_{j=1}^{k-1} a_j (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) - \\ & - \frac{0.2B \cos(x_k^2)}{A + 0.2 \cos(x_k^2)B} \sum_{j=1}^{k-1} b_j (x_{k-j+1} - x_{k-j-1}). \end{aligned} \quad (1.120)$$

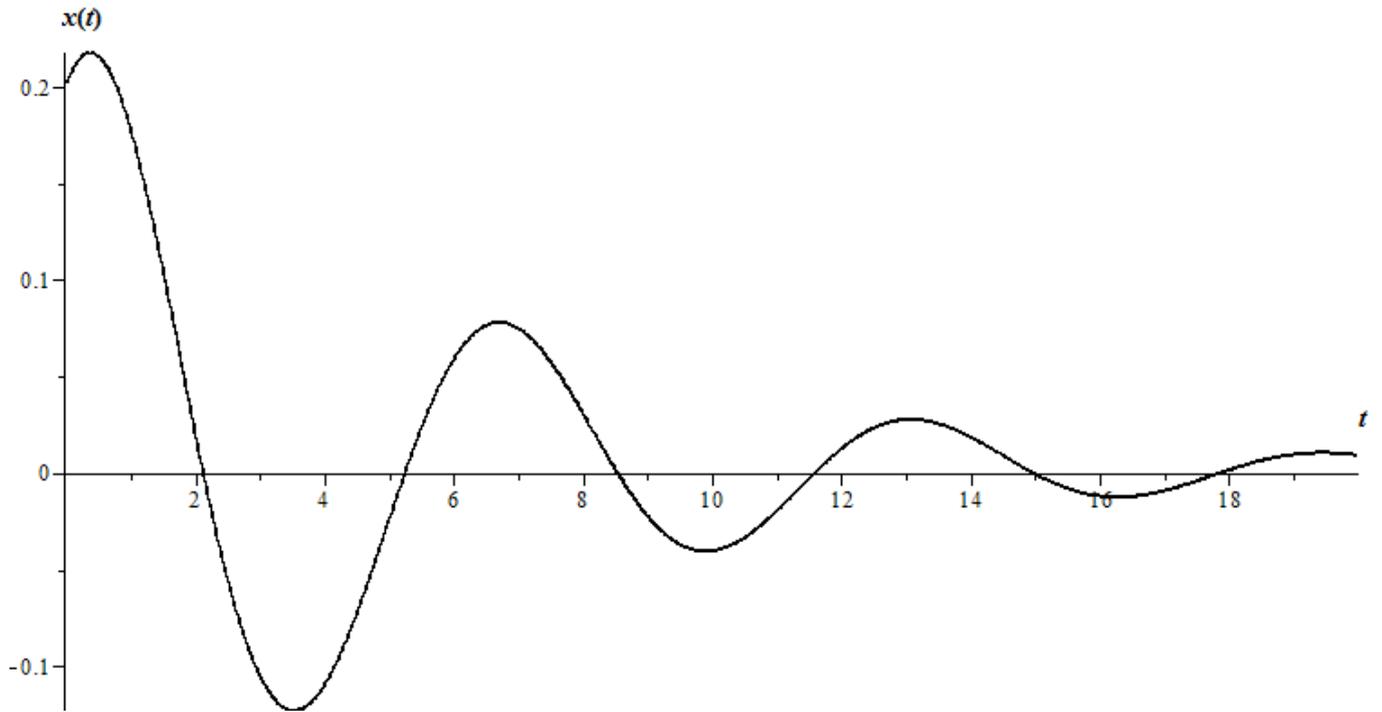


Рисунок 1.27 — Оциллограмма для Примера 1.

С помощью схемы (1.120) и компьютерные программы HNO [138] построим расчетные кривые — оциллограммы (рисунок 1.27).

Из рисунка 1.27 видно, что колебания имеют затухающий характер. Это обусловлено, тем что колебательный процесс происходит нелинейным трением и с памятью. Поэтому в соотношении для полной механической энергии появляется дополнительное слагаемое, ответственное за диссипацию энергии. Также заметим, что в уравнении (1.118) отсутствует внешнее воздействие на систему, которое бы подкачивала энергию в колебательную систему.

Исследуем явную конечно-разностную схему (1.120). Заметим, что для Примера выполнены условия Теоремы 2., т.е. $A \geq \|\lambda\|B$, поэтому шаг τ можно выбрать меньше единицы. Выберем в Примере $\lambda_0 = 200$, остальные значения параметров оставим без изменения и построим согласно расчетной схеме (1.120) оциллограмму (рисунок 1.28).

Здесь мы видим отсутствие сходимости и устойчивости численного решения, так как $\lambda_0 \gg 1$ и мы приходим к жесткой задаче. Поэтому необходимо уменьшить шаг дискретизации τ согласно условию Теоремы 2. (1.109), т.е. $\tau \leq \tau_0 = 0.001$, что приводит к большому числу вычислений.

Построим фазовую траекторию для Примера по точкам $(\dot{x}(t), x(t))$ (рисунок 1.29)

Видно, что фазовая траектория имеет форму закручивающейся спирали в силу затухания колебаний, точка покоя является устойчивым фокусом. Другой подход к построению фазовой траектории был предложен в работах [120, 122] (рисунок 1.30).

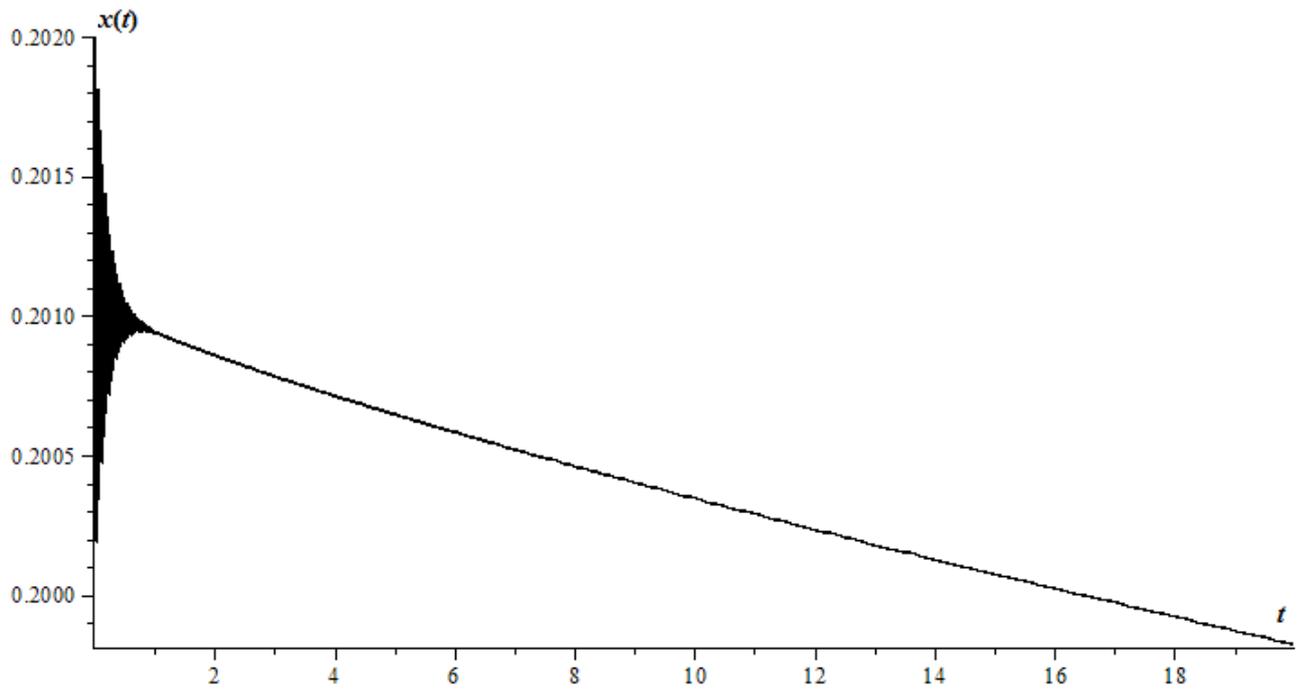


Рисунок 1.28 — Осциллограмма для Примера

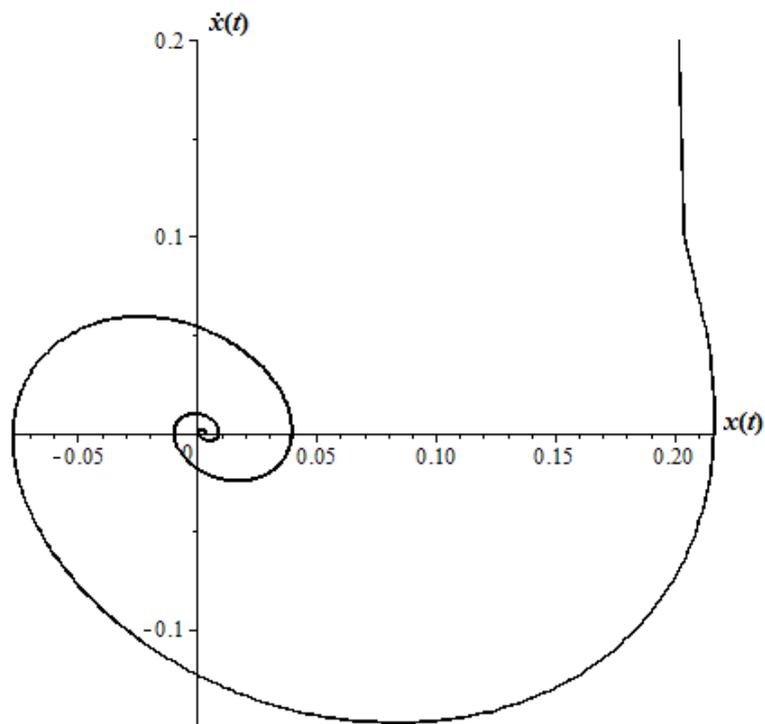


Рисунок 1.29 — Фазовая траектория для Примера

Фазовая траектория на рисунке 1.30 построена по координатам $(\partial_{0t}^{\beta-1}x(\eta), x(t))$. Такой подход может рассматриваться, как обобщение классического понятия фазовой траектории. Сравнивая рисунок 1.29 и рисунок 1.30 мы можем, сделать вывод о том, что введение обобщен-

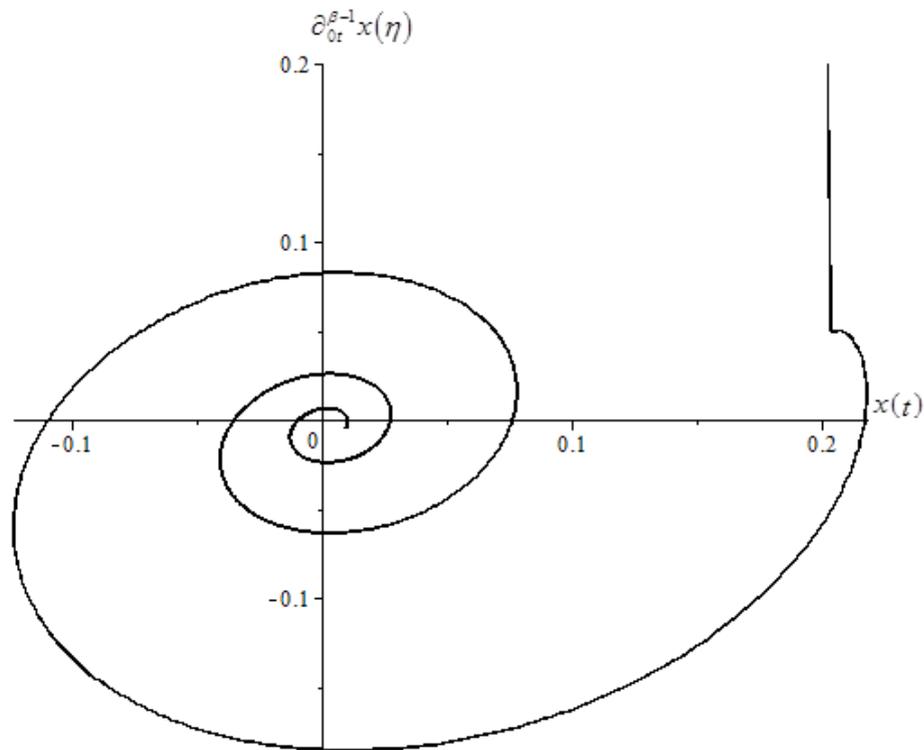


Рисунок 1.30 — Фазовая траектория для Примера

ных координат приводит к повороту по часовой стрелке фазовых траекторий при сохранении их формы. По-видимому угол поворота зависит от параметра β .

1.9.5 Выводы по подразделу

В работе предложена математическая модель семейства осцилляторов с памятью, которая представляет собой задачу Коши. Для задачи Коши обосновано существование и единственность ее решения. Построена и исследована явная конечно-разностная схема. Приведен тестовый пример работы схемы. Результаты моделирования, показали, что явная конечно-разностная схема дает приемлемые результаты при выполнении условия Теоремы 1. В случае нарушения этого условия, необходимо уменьшать шаг τ , что не всегда оправдано. Поэтому необходимо разрабатывать другие более эффективные численные методы решения задачи Коши.

Дальнейшее продолжение работы может быть связано с обобщением задачи Коши (1.91) и (1.92) в случае $\beta(t)$ и $\gamma(t)$, что усложняет схему (1.105) [139].

1.10 О свойстве Пенлеве для одной системы гидродинамического типа

1.10.1 Тест Пенлеве

В математической физике и различных разделах математики находит свое применение уравнение Кортевега-де Вриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.121)$$

Рассмотрим уравнение Кортевега-де Вриза (1.121) в переменных бегущей волны $\zeta = x - ct$, где c – скорость волны.

$$-cu_\zeta + 6uu_\zeta + u_{\zeta\zeta\zeta} = 0 \quad (1.122)$$

Для нелинейных дифференциальных уравнений важным свойством является отсутствие подвижных особых точек. Особая точка является подвижной, если особенность решения зависит от начальных условий.

Представим решение в виде

$$u(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u_i}{\zeta^{p-i}} \quad (1.123)$$

На первом этапе подставим ведущее слагаемое в уравнение (1.122) для определения параметра p .

$$-c \frac{-pu_0}{\zeta^{p+1}} + 6 \frac{u_0}{\zeta^p} \frac{-pu_0}{\zeta^{p+1}} + \frac{(-p)(-p-1)(-p-2)u_0}{\zeta^{p+3}} = 0 \quad (1.124)$$

Приравняем знаменатели ведущих слагаемых $2p + 1 = p + 3$. Откуда получаем $p = 2$.

Тогда при $p = 2$ получаем равенство старших степеней

$$-\frac{12u_0^2}{\zeta^5} - \frac{24u_0}{\zeta^5} = 0 \quad (1.125)$$

Найдем коэффициент разложения u_0 . Одно решение является тривиальным, а второе решение дает $u_0 = -2$.

На втором этапе определим индексы Фукса, которые отвечают за число свободных параметров в ряде Лорана. Если данные индексы окажутся целыми, то можно получить разложение в виде формального ряда со свободными параметрами. В случае системы уравнений дополнительно необходимо проверить, что каждом индексе Фуксе полученная система линейных уравнений имеет решение.

Составим уравнение Фукса с помощью подстановки слагаемых с параметром ε .

$$u(\zeta) = \frac{u_0 + u_j \varepsilon \zeta^j}{\zeta^p} \quad (1.126)$$

После подстановки соберем слагаемые при первой степени ε . Получим при коэффициенте a_j уравнение $a_j(j^3 - 9j^2 + 14j + 24) = 0$. Чтобы коэффициент a_j был свободным в ряде Лорана, мы получаем из уравнения корни $j = -1, 4, 6$. Таким образом, для уравнения Кортевега-де Вриза свободными коэффициентами являются a_4, a_6 . Индекс $j = -1$ соответствует свободному значению ζ_0 в старшем слагаемом ряда Лорана $\frac{u_0}{(\zeta - \zeta_0)^2}$.

После нахождения индексов Фукса последовательно разрешим коэффициенты $u_i, i = 1..6$. Получим формальное разложение решения в ряд Лорана (1.127).

$$u(\zeta) = \frac{-2}{\zeta^2} + \frac{c}{6} + u_4\zeta^2 + u_6\zeta^4 - \frac{1}{6}u_4^2\zeta^6 - \frac{3}{22}u_4u_6\zeta^8 + \left(\frac{1}{78}u_4^3 - \frac{1}{26}u_6^2\right)\zeta^{10} + \frac{1}{66}u_6u_4^2\zeta^{12} + \\ + \left(-\frac{5}{5304}u_4^4 + \frac{15}{2431}u_4u_6^2\right)\zeta^{14} + \left(-\frac{29}{21736}u_4^3u_6 + \frac{1}{988}u_6^3\right)\zeta^{16} + (1.127)$$

Таким образом, уравнение Кортевега-де Вриза проходит тест Пенлеве. Следовательно, выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве.

1.10.2 Реализация теста Пенлеве для уравнения Кортевега-де Вриза в системе компьютерной алгебры SageMath

В качестве примера рассмотрим реализацию алгоритма вычисления индексов Фукса для уравнения Кортевега-де Вриза. Зададим уравнение Кортевега-де Вриза в графической оболочке notebook() для SageMath:

```
reset() # перезапускаем рабочий лист
import sympy # импортируем символьную библиотеку
var('a,a0,e,j') # объявляем переменные a, a0, e, j
y = function('u')(x) # y - это функция u(x)
h = function('h')(x) # h - функция h(x)
KdV = diff(y,x,3)+a*y(x)*diff(y,x) # уравнение КдВ
print KdV # вывод на экран
h(x) = a0/x^2 # зададим функцию h(x) в виде полюс 2 порядка
S = KdV.substitute_function(y,h) # подставим в уравнение h(x)
print S # вывод на экран
G = solve(S,a0) # вычислим коэффициент a0
print G # вывод на экран
[a0 == -12/a, a0 == 0]
```

Получаем 2 значения коэффициента a_0 . Для получения нетривиального решения выберем ненулевой коэффициент $a_0 = -12/a$.

```
h(x) = (G[0].right()+e*x^j)/x^2 # зададим h(x)
F = SR(sympy.simplify(KdV.substitute_function(u,h).
diff(e).subs(e==0,x==1))) # подставим h(x)
print F # получим
j^3 - 9*j^2 + 14*j + 24
solve(F,j) # решим уравнение для нахождения индексов Фукса
```

[j == 4, j == -1, j == 6]

Для уравнения КдВ индексы Фукса равны $\{-1, 4, 6\}$. Реализовать алгоритм вычисления индексов Фукса можно с помощью облачного сервиса cloud.sagemath.org. Так же существует возможность без установки Sagemath на локальный компьютер выполнить программу на сайте www.sagenb.org.

1.10.3 Анализ системы гидродинамического типа

Аналитические свойства системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных упрощением уравнений МГД, используются при выполнении численного моделирования. В теории нелинейных дифференциальных уравнений особое место занимают уравнения, которые обладают свойством Пенлеве. Необходимым условием наличия данного свойства является выполнение теста Пенлеве. В маломодовом приближении уравнений МГД рассматривается система из 4-х обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых связаны две моды поля скорости и две моды магнитного поля.

Для системы

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + R_m (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= P_m \Delta \mathbf{v} - \nabla p - E^{-1} P_m (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \\ \partial_t \mathbf{B} &= R_m \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + R_\alpha \text{rot} (\alpha \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1.128}$$

\mathbf{v} – средняя скорость, \mathbf{B} – среднее магнитное поле, p – давление, \mathbf{f} – плотность внешних сил, α – величина α -эффекта, R_m – магнитное число Рейнольдса, E – число Экмана, P_m – число Пранд-ля, R_α – амплитуда α -эффекта, \mathbf{e}_z – единичный вектор оси вращения, рассмотрены 2 варианта маломодовой системы: упрощенная система маломодового приближения и маломодовая система в общем виде. Для упрощенной системы с помощью метода Ковалевской-Гамбье получены условия выполнения теста Пенлеве и найдены условия, которым удовлетворяют коэффициенты системы.

Для маломодовой системы в общем случае с учетом симметрий коэффициентов $P_{12} = -P_{21}$, $A_{112} = -A_{211} = A$, $L_{112} = -W_{112} = -L$, $L_{211} = -W_{121} = -P$, $L_{222} = -W_{222} = -Q$, $\mu_1 = \mu_2 = \eta_1 = \eta_2 = 1$, $F_1 = 0$ найдены условия на существование целых индексов Фуксов.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= R_m A_{112} x_1 x_2 + E^{-1} P_m P_{12} x_2 + F_1 + R_m L_{112} y_1 y_2 - \mu_1 x_1, \\
\frac{dx_2}{dt} &= R_m A_{211} x_1^2 + E^{-1} P_m P_{21} x_1 + F_2 + R_m L_{211} y_1^2 + R_m L_{222} y_2^2 - \mu_2 x_2, \\
\frac{dy_1}{dt} &= R_m W_{112} x_1 y_2 + R_m W_{121} x_2 y_1 + R_\alpha W_{1\alpha 2} y_2 - \eta_1 y_1, \\
\frac{dy_2}{dt} &= R_m W_{222} x_2 y_2 + R_\alpha W_{2\alpha 1} y_1 - \eta_2 y_2.
\end{aligned} \tag{1.129}$$

Для системы получение соотношение коэффициентов $Q = -L^2/(4P)$, которое дает возможность получить целые индексы Фукса.

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= Au_1 u_2 + Ku_2 - Lu_3 u_4 - u_1 \\
\dot{u}_2 &= -Au_1^2 - Ku_1 - Pu_3^2 - Qu_4^2 + M - u_2 \\
\dot{u}_3 &= Lu_1 u_4 + Pu_2 u_3 + \alpha u_4 - u_3 \\
\dot{u}_4 &= Qu_2 u_3 + \alpha u_3 - u_4
\end{aligned} \tag{1.130}$$

В случае $L = 2P$, $P = 1$, свободные параметры K , α , зависимый параметр M , система проходит тест Пенлеве, например, при $\alpha = 3$, $K = 2$.

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_1 u_2 - u_1 + 2u_2 - 2u_3 u_4, \\
\dot{u}_2 &= -u_1^2 - u_2 - 2u_1 - u_3^2 + u_4^2 + \frac{1330}{99}, \\
\dot{u}_3 &= 2u_1 u_4 + u_2 u_3 + 3u_4 - u_3, \\
\dot{u}_4 &= -u_2 u_3 + 3u_3 - u_4
\end{aligned} \tag{1.131}$$

В полученной системе положим параметр $M = 0$ и получим модифицированную систему. Непосредственное вычисление дает периодические осцилляции без затухания, в противном случае мы получаем затухающие колебания. Дальнейший анализ системы уравнений заключается в поиске режимов смены устойчивости точек равновесия для набора параметров, при котором система проходит тест Пенлеве.

Представленные в подразделе результаты опубликованы в работах [140, 141].

1.11 Интегрируемые нелинейные волновые уравнения

1.11.1 Свойства и примеры интегрируемых иерархий

Нелинейные интегрируемые уравнения в частных производных представляют собой класс систем, характеризующихся наличием специальных свойств (более или менее эквивалентных), таких как

- бесконечное число (локальных) законов сохранения, групповых симметрий;
- представление Лакса: пара коммутирующих линейных дифференциальных операторов;
- n -солитонные, абелевы решения ($n \rightarrow \infty$), тау-функции;

– сводимость к уравнениям Пенлеве, изомонодромным деформациям; и некоторых других [142].

Классический пример – уравнение Кортевега–Де-Вриза (КдВ) [143, 144]:

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x, \quad (1.132)$$

где $u_x = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$. Уравнение (1.132) имеет n -солитонные решения для любого $n \in \mathbb{N}$, а также рациональные и алгебро-геометрические (абелевы) решения. Последние представляют собой не что иное как тета-функции на алгебраических кривых. В самом деле, простым преобразованием уравнение (1.132) сводится к уравнению на эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(x)$:

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \quad (1.133)$$

Приведем другие важные примеры интегрируемых уравнений. Уравнение Хироты:

$$u_t + iau + ib(u_{xx} - 2\eta|u|^2u) + cu_x + d(u_{xxx} - 6\eta|u|^2) = 0, \quad \eta, a, b, c, d = \text{const} \quad (1.134)$$

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (2+1 обобщение КдВ):

$$(u_t + uu_x + \epsilon^2 u_{xxx})_x + \lambda u_{yy} = 0, \quad \epsilon, \lambda = \text{const} \quad (1.135)$$

1.11.2 Билинейный оператор Хироты

Билинейный оператор Хироты определяется следующим образом [145, 146]:

$$D_x^n f \cdot f := (\partial_1 - \partial_2)^n f(x_1) f(x_2)|_{x_1=x_2=x} \quad (1.136)$$

Теорема Хироты утверждает, что любое уравнение

$$P(D_x, D_y, \dots, D_t) = 0 \quad (1.137)$$

имеет по крайней мере 2-солитонное решение, причем коэффициент взаимодействия определяется формулой

$$c_1 c_2 = -\frac{P(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{P(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)} \quad (1.138)$$

Таким образом, все уравнения иерархии КдВ выражаются через оператор D .

$$P(D_1, D_3, D_5 \dots) f \cdot f = 0, \quad (1.139)$$

где $P(\cdot)$ – однородный по D_i полином. Например, уравнение (1.132) имеет билинейную форму

$$D_1(D_1^3 + D_3) f \cdot f = 0, \quad (1.140)$$

Однако, КдВ более высокого порядка имеет размерность $(1 + n)$, поэтому

Введем k -линейный оператор Хироты:

$$H(k, l)_x^m(f \dots f) := (\partial_1 + \gamma_1 \partial_2 + \dots + \gamma_{k-1} \partial_k)^m f(x_1) \dots f(x_k)|_{x_i=x, i=1 \dots k}, \quad (1.141)$$

где γ - k -й корень из единицы, а значения l соответствуют перестановкам γ^s . Например, для $k = 3$ базис состоит из двух элементов:

$$T^3 := H(3,1) = \partial_1 + e^{\frac{2}{3}i\pi} \partial_2 + e^{\frac{4}{3}i\pi} \partial_3 \quad (1.142)$$

$$(T^*)^3 := H(3,1) = \partial_1 + e^{\frac{4}{3}i\pi} \partial_2 + e^{\frac{2}{3}i\pi} \partial_3 \quad (1.143)$$

Пример: определитель 3 порядка

$$\begin{vmatrix} f'' & f' & f \\ f''' & f'' & f' \\ f'''' & f''' & f'' \end{vmatrix} = (T^6 - T^3(T^*)^3) f \cdot f \cdot f = \quad (1.144)$$

$$= f (D_x^3(D_{\tau'} + D_x^3) f \cdot f), \quad (1.145)$$

с дополнительным условием $D_x(D_{\tau'} + D_x^3) f \cdot f = 0$.

Рассматриваемые мультилинейные уравнения можно представить в виде таблицы 1.7.

Таблица 1.7 — Мультилинейные представления некоторых солитонных уравнений

Уравнение	2-линейный	3-линейный	4-линейный
KdV 3	$D_x(D_x^3 + D_t)$	$2T_x^2 T_x^{*2} + 3T_x^* T_t$	$2G_x^1 G_x^3 + G_x^1 G_t^2$
KdV 5	—	$T_x^4 T_x^* + T_x^* T_t$	—
	—	$20T_x^3 T_x^{*3} + 7T_x^6 + 27T_x^* T_t$	$G_x^2 G_x^3 + 5G_x^1 G_x^2 G_x^3 +$ $+12G_x^1 G_t^2$
SK 5	$D_x(D_x^5 + D_t)$	$10T_x^3 T_x^{*3} - T_x^6 + 9T_x^* T_t$	—
SK 7	—	$T_x^5 T_x^{*2} + T_x^2 T_t$	—
	—	$14T_x^4 T_x^{*4} + 14T_x^7 T_x^* + 27T_x T_t$	$3G_x^3 + 7G_x^1 G_x^3 - 42G_x^1 G_x^2 G_x^3 +$ $+64G_x^1 G_t^2$ $7G_x^1 G_x^2 G_x^3 + G_x^1 G_x^2 G_x^3 +$ $+16G_x^1 G_t^2$
«new» 7	$D_x(D_x^7 + D_t)$	$35T_x^4 T_x^{*4} - 4T_x^7 T_x^* + 27T_x T_t$	—
	—	—	$7G_x^4 G_x^3 - G_x G_x^2 G_x^3 + 12G_x^1 G_t^2$
«tail» 9	$D_x(D_x^9 + D_t)$	$14T_x^5 T_x^{*5} - 5T_x^8 T_x^{*2} + 9T_x T_t$	—

Продеформируем оператор D для произвольной калибровочной функции, заданной в виде ряда Тейлора по h .

$$z(x, h) = \exp \left[x + \sum_{i=1}^{\infty} S_i(x) h^i \right], \quad (1.146)$$

или:

$$z(x_1, x_2, \dots, h) = e^{\hat{W}} e_1^x, \quad (1.147)$$

где $\hat{W} = 0$ при $h = 0$. Применим разложение по степеням и приравняем к нулю коэффициенты в уравнении (1.148):

$$D_q^n(zg_1, zg_2) = x^2 \cdot D_q^n(g_1, g_2), \quad (1.148)$$

где

$$D_q^n = D^n + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i h^i, \quad \sigma_i = \sum_{0 \leq l, m \leq i+1} a \frac{d^l}{dx^l} \frac{d^m}{dx^m} \quad (1.149)$$

Получим:

$$D_q^0 \equiv D^0 = g_1 g_2, \quad D_q^1 \equiv D^1 = g_1' g_2 - g_1 g_2', \quad (1.150)$$

а для произвольной степени

$$D_q^{2k} = D^{2k} + I(S) \otimes \sum_{1 \leq i < k} \frac{d}{dx} (D^{2i}(g_1, g_2)) + R_{2k}(S) D^0(g_1', g_2'), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.151)$$

$$D_q^{2k+1} = D^{2k+1} + I(S) \otimes \sum_{1 \leq i < k} (D^{2i+1}(g_1', g_2')) + R_{2k+1}(S) D^0(g_1', g_2'), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.152)$$

$$D_q^3(g_1, g_2) = D^3(g_1, g_2) + (c_{3,1} I_1(S) D^1 + c_{3,2} h S_1''(S) D^0) (g_1', g_2'), \quad (1.153)$$

$$D_q^5(g_1, g_2) = D^5(g_1, g_2) + (c_{5,1} I_1(S) D^3 + c_{5,2} I_2(S) D^1 + h \cdot) (g_1', g_2') \quad (1.154)$$

$$g_2 \rightarrow g_1 \Rightarrow D^1(g_1', g_2) \rightarrow c D^2(g_1, g_1) \quad (1.155)$$

(детали см. в статье [147]).

1.11.3 LLT полиномы, билинейные соотношения

Функции Шура. Рассмотрим разложение

$$\exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \quad (1.156)$$

Определитель

$$s_\lambda = \det([p_{\lambda_i - i + j}]), \quad i, j = 1..n, \quad (1.157)$$

параметризованный разбиением $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, называется многочленом Шура n -ой степени.

Поскольку любая функция Шура есть тау-функция иерархии КП, представляется возможным восстановить коэффициенты билинейных уравнений КП подстановкой $f = s_\lambda$ в однородный билинейный оператор степени s

$$P^s(D_1, D_2, \dots, D_k) f \cdot f = \sum_{i \in \text{yt}(s)} r_i m_i(\bar{D}) f \cdot f \quad (1.158)$$

и приравниванием к нулю соответствующих степеней.

Рассмотрим LLT полиномы $\tilde{G}_\lambda^{(k)}(q, x)$ – одни из q -аналогов функций Шура:

$$\tilde{G}_\lambda^{(k)}(q, x) = \sum_{T \in \text{Tab}_k(\lambda, \cdot)} q^{\tilde{s}(T)} x^T, \quad (1.159)$$

где λ – диаграмма Юнга, T – ленточная таблица специального сорта из λ , q – формальный параметр. При $q = 1$ такой полином вырождается в произведение функций Шура.

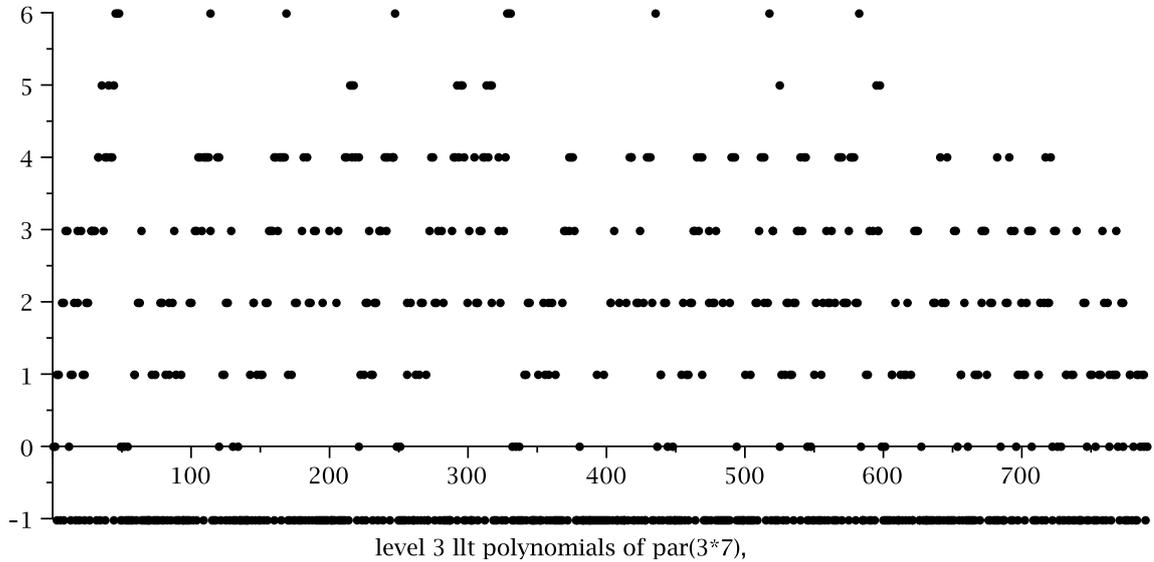


Рисунок 1.31 — Степень LLT полинома в зависимости от λ при $k = \text{const}$ s

Ставится задача отыскать билинейные уравнения для LLT полиномов путем подстановки (1.159) в (1.158). Коэффициенты r_i будут рациональными функциями q . Например, для $s = 5$:

$$P^5(\bar{D}) = D_1^6 + r_{1,5} D_1 D_5 + r_{2,4} D_2 D_4 + r_{3,3} D_3^2 + r_{1,1,1,3} D_1^3 D_3 + r_{1,1,2,2} D_1^2 D_2^2 \quad (1.160)$$

Тогда полином

$$G = t^3 (1/6 x_1^3 - x_1 x_2 + x_3) + (t^2 + t) (1/3 x_1^3 - x_3) + x_3 + x_1 x_2 + 1/6 x_1^3 \quad (1.161)$$

будет решением в том и только том случае, когда

$$r_{1,1,2,2} = 1/2 \frac{(t+1)^2 Q(r)}{(t-1)^2 (t^2+t+1)^2} \quad (1.162)$$

1.11.4 Выводы по подразделу

Проведена классификация нелинейных уравнений с 2-солитонным решением и билинейной формой. Получены новые (квадратичные) соотношения для q -аналогов полиномов Шура (LLT). Наличие локальных законов сохранения у таких уравнений является весьма нетривиальным следствием, что требует более детального изучения.

Представленные в подразделе результаты опубликованы в работах [147, 148].

1.12 Распознавание свистящих атмосфериков в ОНЧ-спектрограммах

На долю свистящих атмосфериков (вистлеров) приходится значительная часть естественного электромагнитного излучения. Они формируются в результате частотной дисперсии импульса грозового разряда, при распространении этого импульса в магнитосферной плазме. В сигналах ОНЧ-диапазона вистлеры проявляются в виде структур, имеющих характерную саблеобразную форму на спектрограмме [149]. Форма дисперсионного искажения импульса определяется параметрами плазмы, поэтому вистлеры являются естественными маркерами состояния плазмосферы Земли [150], и их мониторинг является перспективным направлением исследований космической погоды.

Мониторинг вистлеров в планетарном масштабе осуществляется станциями международной сети AWDANet, работа которой координируется в рамках международного проекта "Plasmon"[151]. Один из регистраторов этой сети работает в обсерваторском пункте Института космофизических исследований и распространения радиоволн (ИКИР) ДВО РАН «Карымшина» Также мониторинг вистлеров в ИКИР ведется с помощью радиокomплекса собственной разработки, в котором реализована система автоматического распознавания вистлеров [152]. Однако, данная система не позволяет вести детектирование вистлеров в реальном времени, что требует разработки новой системы распознавания.

В настоящей работе мы описываем один алгоритм распознавания образа вистлеров в спектрограмме. Исходными данными для задачи распознавания вистлеров в системе мониторинга ИКИР являются 15-минутные wav-файлы сигнала ОНЧ-излучения. Рассматриваемый алгоритм обрабатывает 4-секундный отрезок этого файла. Основная идея алгоритма основана на распознавании "выпрямленного" образа и была изложена ранее в работе [153].

1.12.1 Медианная фильтрация спектрограммы

Рассмотрим спектрограмму такого фрагмента как двумерный массив $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}$, $i = 0, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, M - 1$, где $N = 513$ и $M = 172$. По вертикали индекс i нумерует отсчеты частоты f_i , а по горизонтали индекс j – отсчеты времени t_j . Пример такой спектрограммы, содержащей один вистлер, приведен на рисунке 1.32 слева.

Задача распознавания вистлеров может рассматриваться как задача распознавания графического образа в двумерном изображении. Искомым образом является саблеобразная кривая, форма которой в плоскости (t, f) описывается соотношением $t - t_0 \sim f^{-1/2}$ [149].

Из рисунке 1.32 хорошо видно, что в анализируемом сигнале кроме вистлера присутствуют δ -образные компоненты (импульсы грозовых разрядов, так называемые атмосферрики) и узкополосные составляющие. И те, и другие являются помехами для задачи распознавания и проявляются в спектрограмме в виде протяженных прямолинейных структур, вертикальных и горизонтальных, соответственно.

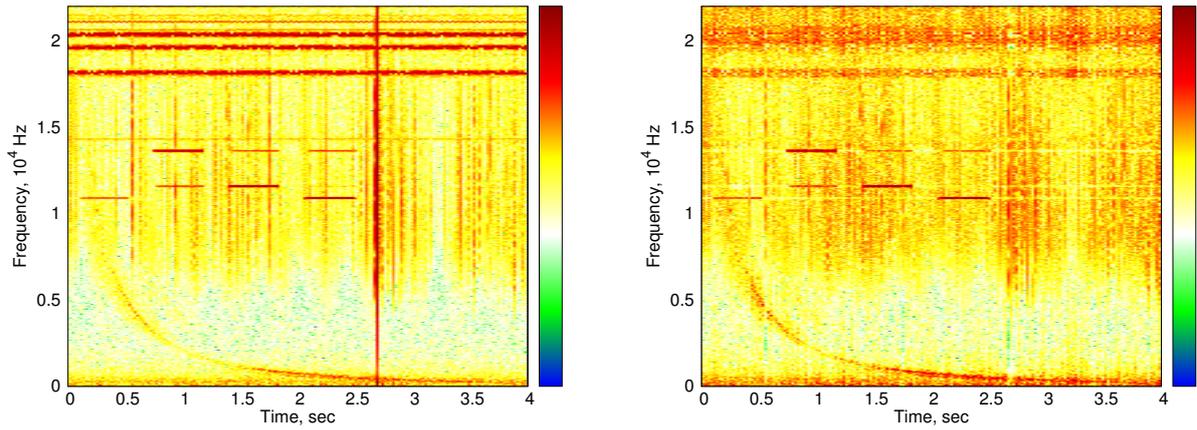


Рисунок 1.32 — Спектрограмма фрагмента ОНЧ-сигнала, содержащего вистлер: исходная (слева) и после медианной фильтрации (справа).

Возникает необходимость, прежде всего, подавить такие помехи, и отобразить статистически значимые отсчеты гистограммы.

Хорошо известно, что эффективным инструментом подавления протяженных импульсных помех в изображениях является медианная фильтрация [154]. Она относится к классу нелинейных фильтров и хорошо сохраняет резкость изображения, поскольку основана на порядковой статистике, которая устойчива к сильным выбросам в данных. В работе [155] был предложен модифицированный алгоритм медианной фильтрации, позволяющий подавлять протяженные вертикальные помехи в спутниковых снимках. Этот алгоритм был адаптирован нами для решения задачи подавления протяженных вертикальных и горизонтальных помех в спектрограммах.

Сначала составляются два одномерных массива \mathbf{X} и \mathbf{Y} , элементы которых являются средними значениями элементов исходного массива спектрограммы по строкам и столбцами соответственно, т.е.

$$X_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} A_{ik}, \quad Y_j = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{N-1} A_{kj}. \quad (1.163)$$

В результате каждая вертикальная помеха оказывается сконцентрированной в нескольких соседних отсчетах массива \mathbf{X} , а горизонтальная ? в нескольких соседних отсчетах массива \mathbf{Y} . Фильтруемым помехам будут тогда соответствовать сильные выбросы в этих массивах.

Далее, каждый из этих массивов подвергается одномерной медианной фильтрации:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_i &= \text{median}\{X_{i+k} \mid k = -L_X, \dots, L_X\}, \quad i = L_X, \dots, N - L_X - 1, \\
\hat{X}_i &= \hat{X}_{L_X}, \quad i = 0, \dots, L_X - 1, \\
\hat{X}_i &= \hat{X}_{N-L_X-1}, \quad i = N - L_X, \dots, N - 1, \\
\hat{Y}_j &= \text{median}\{Y_{j+k} \mid k = -L_Y, \dots, L_Y\}, \quad j = L_Y, \dots, M - L_Y - 1, \\
\hat{Y}_j &= \hat{Y}_{L_Y}, \quad j = 0, \dots, L_Y - 1, \\
\hat{Y}_j &= \hat{Y}_{M-L_Y-1}, \quad j = M - L_Y, \dots, M - 1,
\end{aligned} \tag{1.164}$$

где $2L_X + 1$ и $2L_Y + 1$ являются длинами масок фильтров. Затем вычисляются массивы шумов $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}$ и $\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$.

Фильтрованную spectrogramму $\hat{\mathbf{A}}$ определим далее по правилу $\hat{A}_{ij} = A_{ij} - (\Delta X_i + \Delta Y_j)/2$. Она изображена на рисунке 1.32 справа. Видно, что предложенный алгоритм медианной фильтрации действительно эффективно подавляет образы атмосфериков и узкополосных шумов, а образ вистлера не размывается. Сохраняются и короткие ~ 0.5 сек. сигналы радиостанций.

1.12.2 Отбор значимых точек spectrogramмы

На следующем этапе распознавания происходит отбор значимых отсчетов для каждого столбца фильтрованной spectrogramмы. Мы рассматриваем квадраты элементов столбца как периодограмму Шустера соответствующего фрагмента ОНЧ-сигнала и выполняем проверку на уровне значимости α гипотезы о том, что этот фрагмент сигнала является белым шумом [156].

Для этого вычисляем по каждому j -му столбцу spectrogramмы $\hat{\mathbf{A}}$ дисперсию σ_j^2 через ее спектральное представление

$$\sigma_j^2 = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \hat{A}_{ij}^2. \tag{1.165}$$

Далее, если $\hat{A}_{ij}^2 < -\sigma_j^2 (\ln \alpha) / N$, то отсчет \hat{A}_{ij} считается шумовым (незначимым), в противном случае – значимым.

Из пар индексов (i, j) значимых элементов составляется динамический одномерный массив \mathbf{P} с элементами $P_m = (i_m, j_m)$, размерность которого равна количеству значимых элементов spectrogramмы. Это делается для ускорения обработки, поскольку в дальнейшем в работе алгоритма распознавания используются не отсчеты spectrogramмы, а массивы $\mathbf{P} = \{P_m\}$, $\mathbf{t} = \{t_j\}$ и $\mathbf{f} = \{f_i\}$. При этом элементу P_m соответствует точка $\hat{A}_{i_m j_m}$ на фильтрованной spectrogramме. Далее будем отождествлять P_m и $\hat{A}_{i_m j_m}$.

Переходом к этим массивам обеспечивается существенное снижение объема обрабатываемых далее данных. Анализ типичных spectrogramм показал, что размерность массива \mathbf{P} оказывается примерно на порядок меньше размерности исходной spectrogramмы.

На рисунке 1.33 слева точками изображены элементы, отобранные для спектрограммы \hat{A} . Видно, что образ вистлера хорошо просматривается после отбора.

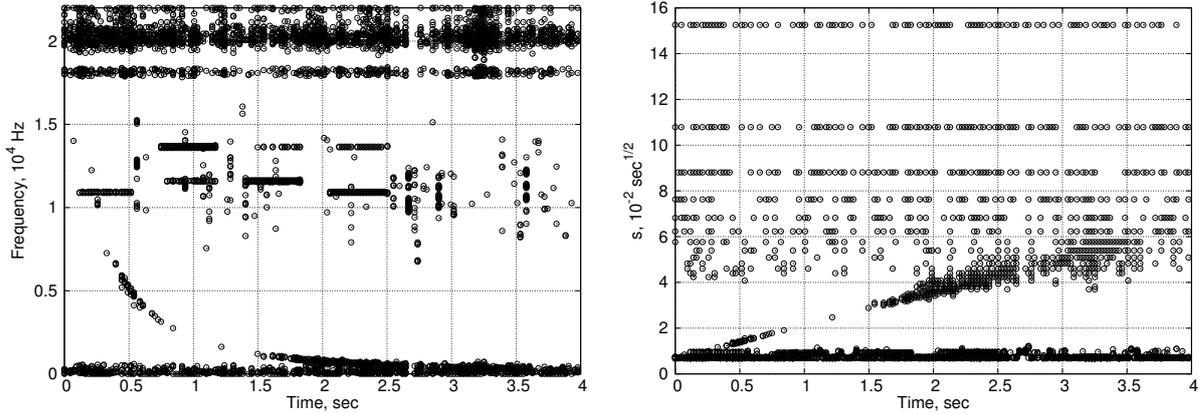


Рисунок 1.33 — Значимые точки спектрограммы в плоскости (t, f) (слева) и в плоскости (t, s) (справа).

1.12.3 Схема распознавания

Из теории распространения ОНЧ-волн в магнитосферной плазме известно [149], что форма вистлера, пришедшего в момент τ , хорошо описывается уравнением

$$t - \tau = D/\sqrt{f}, \quad (1.166)$$

где коэффициент $D > 0$ называют дисперсией. Из ((1.166)) видно, что если ввести преобразование $s = f^{-1/2}$, то в плоскости координат (t, s) образ вистлера выпрямляется, и уравнению ((1.166)) будет соответствовать в этой плоскости уравнение $t - Ds - \tau = 0$, т.е. уравнение наклонной прямой, образующей ненулевой острый угол с положительным направлением оси времени. Соответствующие элементам $P_m = (i_m, j_m)$ точки $Q_m = (t_{j_m}, s_{i_m})$ изображены на рисунке 1.33 справа.

Поскольку распознавание прямой линии представляется алгоритмически более простой задачей, чем распознавание кривой, удобнее детектировать вистлера в плоскости (t, s) . Признаком наличия вистлера (вистлеров) тогда является группировка точек вблизи прямой (прямых) в этой плоскости. Причем речь идет только о наклонных прямых, поскольку остатки узкополосных шумов и сигналов радиостанций после медианной фильтрации и отбора значимых элементов продолжают проявляться в виде горизонтальных прямолинейных структур.

Из многих вариантов записи уравнений таких прямых, для наших целей лучше всего подходит

$$t \sin \varphi - s \cos \varphi - d = 0, \quad (1.167)$$

где φ – угол, образуемый прямой с осью времени, а d – обобщенное расстояние от прямой до начала координат, принимаемое положительным, если прямая пересекает ось s в положительной точке, и отрицательным в противном случае.

Обработка большого числа спектрограмм показала, что реальные значения $\varphi \in [1^0; 10^0]$. Ясно также, что $d \geq d_{\min} = -\max\{t_{j_m}\}$ и $d \leq d_{\max} = \max\{s_{i_m}\}$.

Пучёк прямых, проходящих через точку Q_m , задается уравнением

$$t_{j_m} \sin \varphi - s_{i_m} \cos \varphi = d, \quad (1.168)$$

определяющим линию в области $1^0 < \varphi < 10^0$, $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$ плоскости (φ, d) . Тогда прямой (образу вистлера), проходящей через несколько точек Q_m , будет соответствовать точка пересечения таких линий. Поэтому признаком близости точек к прямой в плоскости (t, s) будет существование точки в плоскости (φ, d) , через малую окрестность которой проходят линии. При этом, чем меньше окрестность, тем ближе к прямой лежат точки в (t, s) , и наоборот.

Введем равномерные сетки $\{\varphi_k\}$ и $\{d_l\}$ на возможных значениях углов и расстояний. Для каждой точки Q_m и каждого угла φ_k из уравнения ((1.168)) определяем расстояние d и округляем его до ближайшего d_l .

В результате получим двумерную гистограмму распределения пар (φ, d) для точек Q_m . Если для пары (φ_k, d_l) значение гистограммы велико, то много точек Q_m лежит вблизи соответствующей прямой. Таким образом, каждому значимому максимуму гистограммы можно поставить в соответствие вистлер.

Отбор значимых максимумов также можно проводить как и было описано выше на основе теоремы Шустера.

1.12.4 Выводы по подразделу

В настоящей работе описан алгоритм распознавания образов свистящих атмосфериков в спектрограммах ОНЧ-излучения, состоящий из четырех этапов: медианной фильтрации; отбора значимых точек; преобразования координат с целью выпрямления образа вистлера; распознавание "выпрямленного" вистлера.

Тестирование описанного алгоритма распознавания показало, что обработка 225 спектрограмм одного 15-минутного wav-файла требует менее 4 минут, что обеспечивает значительный резерв времени обработки. Для обнаружения значимых максимумов в гистограмме распределения пар в автоматическом режиме в настоящее время разрабатывается нейронная сеть.

Результаты подраздела изложены в работах [157, 158, 159, 160].

1.13 Основные публикации по разделу

Ниже приводим перечень основных публикаций результатов, описанных в настоящем разделе.

- Водинчар Г.М., Годомская А.Н., Шереметьева О.В. Инверсии магнитного поля в модели крупномасштабного $\alpha\Omega$ -динамо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 2. – №11. – С. 55-60.
- Водинчар Г.М., Нощенко Д.С., Пережогин А.С. Тест Пенлеве для одной системы магнитной гидродинамики // Вестник КРАУНЦ. – Физ.-мат. науки. – 2015. – №2(11). – С. 61-66.
- Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Инверсии в модели геодинамо, управляемой 6-ячейковой конвекцией // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 2. – №11. – С. 45-54.
- Малыш Е.А. Алгоритм для автоматического распознавания свистящих атмосфериков в режиме реального времени // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 11. – №2. – С. 82-87.
- Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2015. – №1(10). – С. 18-24.
- Паровик Р.И. Математическое моделирование фрактального осциллятора Ван-дер-Поля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2015. – Т. 17. – №2. – С. 57-62.
- Feschenko L. K., Vodinchar G. M. Reversals in the large-scale $\alpha\Omega$ -dynamo with memory // Nonlin. Proc. Geophys. – 2015. – Vol. 22. – pp. 361-369.
- Водинчар Г.М., Годомская А.Н., Шереметьева О.В. Инверсии магнитного поля в одной маломодовой модели $\alpha\Omega$ -динамо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2016. – №4(15). – С. 17-23.
- Водинчар Г.М., Нощенко Д.С., Пережогин А.С. О свойстве Пенлеве гидродинамической системы // Вестник КРАУНЦ. – Физ.-мат. науки. – 2016. – №3(14). – С. 29-33.
- Маломодовые модели гидромагнитного динамо: коллективная монография / под. ред. Г.М. Водинчара. – Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2016.
- Малыш Е.А., Водинчар Г.М., Чернева Н.В. Распознавание свистящих атмосфериков в ОНЧ-спектрограммах // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2016. – №4(15). – С. 43-48.
- Паровик Р.И. Некоторые свойства фрактального осциллятора Ван дер Поля // Актуальные проблемы прикладной математики и информатики. – 2016. – С. 243–347.
- Паровик Р.И. Математическое моделирование эрдитарного осциллятора Коши-Эйлера // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. – №1. – С. 81-83.
- Паровик Р.И. Об исследовании устойчивости эрдитарного осциллятора Ван-дер-Поля // Фундаментальные исследования. – 2016. – №3(2). – С. 283-287.

- Паровик Р.И. Об одной конечно-разностной схеме для математической модели нелинейного эредитарного осциллятора // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – №4-2 (46). – С. 138-142.
- Паровик Р.И. Об одной эредитарной колебательной системе с учетом эффекта stick-slip // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2016. – №4(15). – С. 30-35.
- Паровик Р.И. Эредитарный осциллятор Дуффинга с переменными дробными порядками // Науковедение. – 2016. – Т. 8. – №5. – 34TVN516.
- Паровик Р.И. Программа расчета осциллограмм и фазовых траекторий для эредитарных линейных осцилляторов НЛО. Свидетельство о государственной регистрации №2016618032 от 19.07.2016 г.
- Паровик Р.И. Программа расчета осциллограмм и фазовых траекторий для эредитарных нелинейных осцилляторов ННО. Свидетельство о государственной регистрации №2016618829 от 08.08.2016 г.
- Чернева Н.В., Мочалов В.А., Водинчар Г.М., Дружин Г.И., Санников Д.В., Фирстов П.П., Шевцов Б.М., Малыш Е.А., Мочалова А.В., Лихтенбергер Я. Обнаружение и распознавание радиоимпульсов грозовых разрядов // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59. – №12-3. – С. 71-74.
- Noshchenko D.S. Bilinear gauge operators // ArXiv e-prints. – 2016. – 1608.01085.
- Noshchenko D.S. Quiver relations and associated symmetric polynomials // ArXiv e-prints. – 2016. – 1611.01380.
- Noshchenko D., Perezhogin A. On the Painlevé property of a hydrodynamic system // E3S Web Conference. – 2016. – Vol. 11. – 00017.
- Parovik R.I. Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. – 2016. – Vol. 26. – №3. – pp. 281-287.
- Parovik R.I. On a credit oscillatory system with the inclusion of stick-slip // E3S Web of Conferences. – 2016. Vol. 11. – 00018.
- Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Model of Geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core // Magnetohydrodynamics. – 2016. – 52. – №1. – pp. 287-300.
- Vodinchar G.M., Godomskaya A.N., Sheremetyeva O.V. Reversals of the Magnetic Field in one low-dimensional $\alpha\Omega$ -dynamo model // E3S Web of Conferences. – 2016. – Vol. 11. – 00024.
- Vodinchar G.M., Feshchenko L. K. Reversals in the six-jet Geodynamo model // E3S Web of Conferences. – 2016. – Vol. 11. – 00025.
- Паровик Р.И. Математическое моделирование эредитарного осциллятора Эйри с трением // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10. – №1. – С. 138-148.

- Shevtsov B.M., Sheremetyeva O.V. Fractional models of seismoacoustic and electromagnetic activity // E3S Web of Conferences. – 2017. – Vol. 20. – 02013.
- Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Symbolic Computations in Simulations of Hydromagnetic Dynamo // E3S Web of Conferences. – 2017. – Vol. 20. – 02017.
- Malysh E.A., Cherneva N.V. Detection of the whistlers in the VLF-spectrograms // E3S Web of Conferences. – 2016. – Vol. 11. – 00011.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Zeldovich Y.B., Rusmaikin A.A., Sokoloff D.D. Magnetic fields in astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. – New York: Gordon and Breach, 1983.
- 2 Krause F., Rädler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. – Berlin: Academic-Verlag, 1980.
- 3 Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. London, Academic Press, 1996.
- 4 Rikitake T. Electromagnetism and the Earth's interior. – Amsterdam: Elsevier, 1965.
- 5 Ruzmaikin A.A. The solar cycle as a strange attractor // Comm. Astrophys. – 1981. – Vol. 85.
- 6 Schmitt D., Ossendrijver M. A. J. H., Hoyng P. Magnetic field reversals and secular variation in a bistable dynamo model // Phys. Earth Planet. Inter. – 2001. – Vol. 125. – pp. 119-124.
- 7 Pétrélis F., Fauve S., Dormy E., Valet J.-P. Simple Mechanism for Reversals of Earth's Magnetic Field // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 102. – 144503.
- 8 Feshchenko L. K., Vodinchar G. M. Reversals in the large-scale $\alpha\Omega$ -dynamo with memory // Nonlin. Processes Geophys. – 2015. – Vol. 22. – pp. 361-369.
- 9 Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. – М.: БИНОМ, 2009.
- 10 Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Model of Geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core // Magnetohydrodynamics. – 2016. – 52. – №1. – pp. 287-300.
- 11 Соколов Д. Д., Нефедов С. Н. Маломодовое приближение в задаче звездного динамо // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т. 8. – С. 195-204.
- 12 Vodinchar G.M., Godomskaaya A.N., Sheremetyeva O.V. Reversals of the Magnetic Field in one low-dimensional $\alpha\Omega$ - dynamo model // E3S Web of Conferences. – 2016. – Vol. 11. – 00024.
- 13 Водинчар Г.М., 1,2, Годомская А.Н., Шереметьева О.В. Инверсии магнитного поля в одной маломодовой модели $\alpha\Omega$ -динамо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2016. – №4(15). – С. 17-23.
- 14 Jones C. A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A – 2000. – Vol. 358. – pp. 873-897.
- 15 Kono M., Roberts P. H. Recent geodynamo simulations and observations of the field // Reviews of Geophysics. – 2002. – Vol. 40. – pp. B1-B41.
- 16 Соколов Д. Д., Степанов Р. А., Фрик П. Г. Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // Успехи физических наук. – 2014. – Т. 184. – №3. – С. 313-335.
- 17 Кузнецов В. В. Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167. – №9. – С. 1002-1012.

- 18 Водинчар Г.М., Шевцов Б.М. Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14. – №4. – С. 3-15.
- 19 Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. Модель маломодовой конвекции в сферической оболочке // Естественные и технические науки. – 2010. – №4(48). – С. 349-352.
- 20 Крутьева Л.К., Водинчар Г.М. Базисные системы для геомагнитного поля // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1. – С. 24-30.
- 21 Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. Маломодовая модель геодинамо // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, – №2. – С. 35-44.
- 22 Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Инверсии в модели геодинамо, управляемой 6-ячейковой конвекцией // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2015. – №2(11). – С. 45-54.
- 23 Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal Atmos. Sci. – 1963. – Vol. 20. – pp. 130-141.
- 24 Greenspan H. P. The Theory of Rotating Fluids. – New York: Cambridge Univ. Press, 1968.
- 25 Решетняк М.Ю. Моделирование процессов динамо в геофизике // Дисс. док. физ.-мат наук. – М.: ОИФЗ РАН, 2003.
- 26 Ануфриев А. П., Решетняк М. Ю., Соколов Д. Д. Оценка динамо-числа в модели турбулентного α -эффекта для ядра Земли // Геомагнетизм и аэрономия. – 1997. – Т. 37. – С. 141-146.
- 27 Hejda P., Anufriev A. P. A new numerical scheme in the solution of the geodynamo Z-model // The Cosmic Dynamo: Proceedings of the 157th Symposium of the IAU, 7-11 September 1992. – Potsdam, 1993, pp. 441-446.
- 28 Anufriev A., Sokoloff D. Fractal properties of geodynamo models // Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics. – 1994. – Vol. 74. – pp. 207-223.
- 29 Hollerbach R., Barenghi C., Lones C. Taylor's constraint in a spherical $\alpha\omega$ -dynamo // Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics. – 1992. – Vol. 67. – pp. 3-25.
- 30 Schmitt D., Ossendrijver M. A. J. H., Hoyng P. Magnetic field reversals and secular variation in a bistable dynamo model // Phys. Earth Planet. Inter. – 2001. – Vol. 125. – pp. 119-124.
- 31 Giesecke A., Rüdiger G., Elstner D. Oscillating α^2 -dynamoes and the reversal phenomenon of the global geodynamo // Astron. Nachr. – 2005. – Vol. 326. – pp. 693-700.
- 32 Stefani F., Gerbeth G. Asymmetric polarity reversals, bimodal field distribution and coherence resonance in a spherically symmetric mean-field dynamo model // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 94. – 184506.
- 33 Stefani F., Xu M., Sorriso-Valvo L., Gerbeth G., Günther U. Oscillation or rotation: a comparison of two simple reversal models // Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics. – 2007. – Vol. 101. – pp. 227-248.

- 34 Takahashi F., Matsushima M., Honkura Y. Simulations of a Quasi-Taylor State Geomagnetic Field Including Polarity Reversals on the Earth Simulator // *Science*. – 2005. – Vol. 309. – pp. 459-461.
- 35 Wicht J. Palaeomagnetic interpretation of dynamo simulations // *Geophys. Journal International*. – 2005. – Vol. 162. – pp. 371-380.
- 36 Glatzmaier G., Roberts P. A three-dimension self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal // *Nature*. – 1995. – Vol. 377. – pp. 203-209.
- 37 Kutzner C., Christensen U. R. From stable dipole towards reversing numerical dynamos // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 2002. – Vol. 131. – pp. 29–45.
- 38 Hejda P., Reshetnyak M. Control volume method for the dynamo problem in the sphere with free rotating inner core // *Studia Geoph. et Geod.* – 2003. – Vol. 47. – pp. 147-159.
- 39 Busse F. H., Simitev R. Parameter dependences of convection driven dynamos in rotating spherical fluid shells // *Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics*. – 2006. – Vol. 100. – pp. 341-361.
- 40 Coe R. S., Hongre L., Glatzmaier G. An examination of simulated geomagnetic reversal from a paleomagnetic perspective // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. – 2000. – Vol. 358. – pp. 1141-1170.
- 41 Гореликов А.В., Ряховский А.В., Фокин А.С. Численное исследование некоторых нестационарных режимов естественной конвекции во вращающемся сферическом слое // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2012. – Т. 5. – №2. – С. 184-192.
- 42 Stix M. *The Sun. An Introduction*. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989.
- 43 Ermushev A.V., Rusmaikin A.A., Sokoloff D.D. Fractal nature of the sequence of reversals of the geomagnetic field // *Magneto hydrodynamics*. – 1992. – Vol. 4. – pp. 326-330.
- 44 Иванов С.С., Самоподобие последовательности инверсий геомагнитного поля // *Геомагнетизм и аэрономия*. – 1993. – Т. 33. – С. 181-186.
- 45 Печерский Д.М., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д. Фрактальный анализ временной шкалы геомагнитной полярности // *Геомагнетизм и аэрономия*. – 1997. – Т. 37. – С. 132-142.
- 46 Gaffin S. Analysis of scaling in the geomagnetic polarity reversal record // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 1989. – Vol. 57. – pp. 284-290.
- 47 Sornette D. *Critical Phenomena in Natural Sciences*. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2006.
- 48 Moffat H. K. *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. – Cambridge: Univ. Press, 1978.
- 49 Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity // *Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics*. – 2008. – Vol. 102. – pp. 601-632.

- 50 Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport // *Astrophys. Journal.* – 2009. – Vol. 706. – pp. 712-726.
- 51 Parker E.N. Hydromagnetic dynamo models // *Astrophys. Journal.* – 1955. – Vol. 122. – pp. 293-314.
- 52 Steenbek M., Krause F., Rädler K.-H. Berechnung der mittlerer Lorentz–FieldStarke $\mathbf{v} \times \mathfrak{B}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis–Kräfte beeinflusster Bewegung // *Z. Naturforsch.* – 1966. – Vol. 21. – pp. 369-376.
- 53 Steenbek M., Krause F. Zur Dynamotheorie stellarer und planetarer Magnetfelder. I. Berechnung sonnenähnlicher Wechselfeldgeneratoren // *Astron. Nachr.* – 1969. – Vol. 291. – pp. 49-84.
- 54 Schrunner M., Rädler K.-H., Schmitt D., Rheinhardt M., Christensen U. R. Mean-field concept and direct numerical simulations of rotating magnetoconvection and the geodynamo // *Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics.* – 2007. – Vol. 101. – pp. 81-116.
- 55 Ruzmaikin A., Starchenko S. On the origin of Uranus and Neptune Magnetic Fields // *Icarus.* – 1991. – Vol. 93. – pp. 82-87.
- 56 Field G.B., Blackman E.G. Quenching of the α^2 Dynamo // *Astrophys. Journal.* – 2002. – Vol. 572. – pp. 685-692.
- 57 Brandenburg A., Sandin C. Catastrophic alpha quenching alleviated by helicity flux and shear // *Astron. and Astrophys.* – 2004. – Vol. 427. – pp. 13-21.
- 58 Frick P., Sokoloff D., Stepanov R. Large-small scale interactions and quenching in α^2 -dynamo // *Phys. Rev. E.* – 2006. – Vol. 74. – 066310.
- 59 Samorodnitsky G., Taqqu M.S. *Stable Non-Gaussian Random Processes.* – New York, 1994.
- 60 Печерский Д.М. Некоторые характеристики геомагнитного поля за 1700 млн. лет // *Физика Земли.* – 1997. – №2. – С. 132-142.
- 61 Melbourne I., Proctor M. R. E., Rucklidge A. A. M. A heteroclinic model of geodynamo reversals and excursions // *Dynamo and dynamics, a mathematical challenge. NATO Science Series II.* Vol. 26. – Dordrecht: Kluwer Academic, 2001, pp. 363-370.
- 62 Wicht J., Meduri D. A Gaussian Model for Simulated Geomagnetic Field Reversals // *ArXiv e-prints.* – 2015. – 1501.07118.
- 63 Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. – М.: Наука, 1981.
- 64 Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.
- 65 Маломодовые модели гидромагнитного динамо: коллективная монография / под. общ. ред. Г.М. Водинчара; КамГУ им. Витуса Беринга, ИКИР ДВО РАН. – Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2016. – 120 с.

- 66 Chandrasekhar S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. – New York: Dover Publ. Inc., 1981)
- 67 Fletcher C. A. J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1988.
- 68 Maple User Manual. – Waterloo Maple Inc.: Maplesoft, 2016.
- 69 <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=VectorCalculus>
- 70 Водинчар Г.М., Водинчар М.И. Элементы векторного анализа и теории поля в пакете MAPLE. – Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2008.
- 71 Korn G. A., Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New York: Dover Publ. Inc., 2000.
- 72 Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Symbolic Computations in Simulations of Hydromagnetic Dynamo // Web of Conferences. – 2017. – Vol. 20. – 02017.
- 73 Учайкин В.В.: Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук – 2003. – 173. – р. 847–876.
- 74 Шевцов Б.М., Сагитова Р. Н.: Статистический анализ сейсмических процессов на основе диффузионного подхода // Доклады Академии наук – 2009. – Т. 426. – 2. – с. 254–256.
- 75 Шевцов Б.М., Сагитова Р.Н.: Диффузионный подход в статистическом анализе сейсмичности Камчатки // Вулканология и сейсмология – 2012. – 2. – с. 56–66.
- 76 Водинчар Г.М., Пережогин А.С., Сагитова Р.Н., Шевцов Б.М.: Моделирование зон геоакустической эмиссии // Математическое моделирование – 2007. – Т. 19. – 11. – с. 59–64.
- 77 Пережогин А.С., Шевцов Б.М.: Модели напряженно-деформированного состояния горных пород при подготовке землетрясений и их связь с геоакустическими наблюдениями // Вычислительные технологии – 2009. – Т. 14. – 3. – с. 48–57.
- 78 Cahoy D.O., Uhaikin V.V., Woyczynski W.A.: Parameter estimation for fractional Poisson processes // Journal of Statistical Planning and Inference – 2010. – 140. – р. 3106-3120.
- 79 Laskin N.: Fractional Poisson processes // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation – 2003. – 8. – р. 201-213.
- 80 Saichev A., Sornette D.: Theory of Earthquake Recurrence Times // J. Geophys. Res. – 2007. – V.112. – B04313(-4343).
- 81 Марापалец Ю.В., Тристанов А.Б., Шевцов Б.М.: Частотно-временной анализ акустической эмиссии звукового диапазона методом разреженной аппроксимации // Доклады Академии наук – 2014. – Т. 456. – 4. – С. 481–484.
- 82 Марापалец Ю.В., Тристанов А.Б., Шевцов Б.М.: Анализ структуры сигналов акустической эмиссии звукового диапазона методом разреженной аппроксимации // Акустический журнал – 2014. –Т.60. – 4. – С. 398–406. DOI: 10.7868/S032079191404008X

- 83 Уваров В.Н.: Электромагнитно-деформационные волны земной коры // Геофизический журнал – 2016. – Т.38. – 6. – С.180–185.
- 84 Shevtsov B.M., Sheremetyeva O.V. Fractional models of seismoacoustic and electromagnetic activity // E3S Web of Conferences. – 2017. – Vol. 20. – 02013.
- 85 Volterra V. Sur les equations integro-differentielles et leurs applications // Acta Mathematica. – 1912. – Vol. 35. – №1. – pp. 295-356.
- 86 Leitman M.J., Mizel V.J. Hereditary Laws and Nonlinear integral Equations on the Line // Advances in mathematics. – 1976. – Vol. 22. – pp. 220-266.
- 87 Usmonov B. A numerical solution of hereditary equations with a weakly singular kernel for vibration analysis of viscoelastic systems // Proceedings of the Latvian academy of sciences. Section B. – 2015. – Vol. 69. – №6(699). – pp. 326-330.
- 88 Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. – New York: Springer, 2011.
- 89 Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008.
- 90 Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. – Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2015.
- 91 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его приложения. – М.: Физматлит, 2003.
- 92 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo. J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006.
- 93 Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. – London: Academic Press, 1974.
- 94 Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. – New York: A Wiley-Interscience publication, 1993.
- 95 Serebinska M., Hanyga A. Nonlinear differential equations with fractional damping with applications to the 1dof and 2dof pendulum // Acta Mechanica. – 2005. – Vol. 176. – №3. – pp. 169-183.
- 96 Machado J.A.T. et al. Fractional order dynamical systems and its applications // Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications. – 2007.
- 97 Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results // Applied Mechanics Reviews. – 2010. – Vol. 63. – 010801.
- 98 Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
- 99 Паровик Р.И. О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2014. – №1(8). – С. 60-65.

- 100 Shen S., Liu F. Error analysis of an explicit finite difference approximation for the space fractional diffusion equation with insulated ends // ANZIAM J. – 2005. – Vol. 46(E). – pp. 871-887.
- 101 Liu F., Zhuang P., Anh V., Turner I. A fractional order implicit difference approximation for the space-time fractional diffusion equation // ANZIAM J. – 2006. – Vol. 47. – pp. 48-68.
- 102 Li Ch., Chen A., Ye J. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation // Journal of Computational Physics. – 2011. – Vol. 230 – pp. 3352-3368.
- 103 Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riemetrieb // Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A. – 1931. – Vol. 2. – №3. – pp. 99-104.
- 104 Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2014. – Vol. 24. – 013107.
- 105 Дробышева И.В. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов на примере осциллятора Дуффинга с дробными производными в смысле Римана-Лиувилля // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2016. – №2(13). – С. 43-49.
- 106 Ким В.А. Осциллятор Дуффинга с внешним гармоническим воздействием и производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля, характеризующая вязкое трение // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2016. – №2(13). – С. 50-54.
- 107 Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2015. – №1(10). – С. 18-24.
- 108 Паровик Р.И. Эредитарный осциллятор Дуффинга с переменными дробными порядками // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. – 2016. – Т. 8, – №5.
- 109 Diaz G., Coimbra C.F.M. Nonlinear dynamics and control of a variable order oscillator with application to the van der Pol equation // Nonlinear Dyn. – 2009. – Vol. 56. – pp. 145-157.
- 110 Паровик Р.И. Математическое моделирование фрактального осциллятора Ван-дер-Поля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2015. – Т. 17. – №2. – С. 57-62
- 111 Рехвиашвили С.Ш. Размерные явления в физике конденсированного состояния и нанотехнологиях. – Нальчик: КБНЦ РАН, 2014.
- 112 Scholz Ch.H. The mechanics of earthquakes and faulting. – N.Y.: Cambridge Univ. press, 2002.
- 113 Tavazoei M. S., Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2008. – Vol. 237. – №20. – pp. 2628-2637.
- 114 Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Лекции по нелинейной динамике. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.

- 115 Гринченко В. Т., Мацьпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: ЛКИ, 2007.
- 116 Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
- 117 Бутенков С. А. Математические модели процессов на фрактальных структурах с заданными свойствами на основе методов грануляции // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2011. Т. 121. №8. С. 199–209.
- 118 Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232 с.
- 119 Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
- 120 Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. №1. С. 67–73.
- 121 Огородников Е. Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши // Математическое моделирование и краевые задачи. 2009. Т. 1. С. 177–181.
- 122 Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эрдитарных осцилляторов. – Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2015. – 178 с.
- 123 Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. – 218 p.
- 124 Паровик Р.И. Математическое моделирование фрактального осциллятора Ван дер Поля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. №2. С. 57–62.
- 125 Паровик Р.И. Об исследовании устойчивости эрдитарного осциллятора Ван дер Поля // Фундаментальные исследования. 2016. №. 3-2. С. 283–287.
- 126 Паровик Р.И. Некоторые свойства фрактального осциллятора Ван дер Поля // Актуальные проблемы прикладной математики и информатики. 2016. С. 243–347.
- 127 Зайцев В. В., Карлов Ар. В., Нураев Д. Б. Численный анализ автоколебаний активного фрактального осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2013. Т. 16. №2. С. 45–48.
- 128 Anber A., Belarbi S.B., Dahmani Z. New Existence and Uniqueness Results for Fractional Differential Equations // An. St. Univ. Ovidius Constanta. 2013. vol. 21(3). P. 33–41.
- 129 Xu Y., He Z. Existence and uniqueness results for Cauchy problem of variable-order fractional differential equations // J. Appl. Math. Comput. 2013. vol. 43. P. 295–306.
- 130 Samko S. Fractional integration and differentiation of variable order // Analysis Mathematica. 1995. vol. 21. P. 213–236.

- 131 Lorenzo C. F., Hartley T. T. Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized Fractional Calculus. Cleveland, Ohio, USA: Lewis Research Center, NASA, 1998. 16 p.
- 132 Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
- 133 Parovik R. I. Application of fractional calculus to the theory of hereditary dynamical systems // The 8th international conference on differential and functional differential equations, Moscow, 2014. Moscow: RUDN, 2017. P. 135–136.
- 134 Parovik R. I. About one dynamic system, characterizing free oscillations taking into account the variable heredity // International conference on mathematical modelling in applied sciences. Saint Petersburg: Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, 2017. P. 297–298.
- 135 Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
- 136 Xu Y., Ert'urk V.S. A finite difference technique for solving variable-order fractional integro-differential equations // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2014. vol. 40. no. 3. P. 699–712.
- 137 Gavriilyuk I.P., Hermann M., Makarov V.L., Kutniv M.V. Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs. Springer Science & Business Media, 2011. vol. 159. P. 246.
- 138 Паровик Р.И. Программа расчета осциллограмм и фазовых траекторий для эредитарных нелинейных осцилляторов ННО // Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем. 2016. №9.
- 139 Parovik R.I. Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. 2016. T. 26. no 3. P. 429–435.
- 140 Вединчар Г.М., Нощенко Д.С., Пережогин А.С. О свойстве Пенлеве гидродинамической системы // Вестник КРАУНЦ. – Физ.-мат. науки. – 2016. – №3(14). – С. 29-33.
- 141 Noshchenko D., Perezhugin A. On the Painlevé property of a hydrodynamic system // E3S Web Conference. – 2016. – Vol. 11. – 00017.
- 142 Буллаф Р., Кодри Ф. Солитоны. – М.: Мир, 1983 .
- 143 Nuseir A. Symbolic computation of exact solutions of nonlinear partial differential equations using direct methods // PhD Thesis. – 1995.
- 144 Yao R.-X., Xu G.-Q. Conservation Laws and Soliton Solutions for Generalized Seventh Order KdV Equation // Commun. Theor. Phys. – 2004. – Vol. 41. – pp. 487-492.
- 145 Wazwaz A.-M. Exact travelling wave solutions to seventh-order and ninth-order KdV-like equations // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Vol. 182. – pp. 771-780.
- 146 Wazwaz A.-M. The Hirota direct method and the tanh-coth method for multiple-soliton solutions of the Sawada-Kotera-Ito seventh-order equation // Applied Mathematics and Computation. – 2008. – Vol. 199. – pp. 133-138.

- 147 Noshchenko D.S. Bilinear gauge operators // ArXiv e-prints. – 2016. – 1608.01085.
- 148 Noshchenko D.S. Quiver relations and associated symmetric polynomials // ArXiv e-prints. – 2016. – 1611.01380.
- 149 Гершман Б. Н., Угаров В. А. Распространение и генерация низкочастотных электромагнитных волн в верхней атмосфере // Успехи физических наук. – 1960. – Т. 72. №2. – С. 235-271.
- 150 Lichtenberger J. A new whistler inversion method // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2009. – Vol. 114. – A07222.
- 151 <http://plasmon.elte.hu/>
- 152 Cherneva N. V., Sivokon? V. P. , Agranat I. V. Spectral characteristics of whistlers / Problems of Geocosmos. Proc. of the 9th Int. Conf., St. Petersburg, 2012, pp. 212–217.
- 153 Малыш Е. А. Алгоритм для автоматического распознавания свистящих атмосфериков в режиме реального времени // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2015. – Vol. 11. – №2. – С. 82-87.
- 154 Гонсалес Р., Вудс Р., Цифровая обработка изображений, М., Техносфера, 2005
- 155 Гектин Ю. М., Зайцев А. А. Разработка и применение модифицированного алгоритма медианной фильтрации при бортовой коррекции изображений дистанционного зондирования // Труды МФТИ. – 2014. – Т. 6. – №4. – С. 103-106.
- 156 Марпл-мл С. Л., Цифровой спектральный анализ и его приложения, М., Мир, 1990
- 157 Малыш Е.А. Алгоритм для автоматического распознавания свистящих атмосфериков в режиме реального времени // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 11. – №2. – С. 82-87.
- 158 Malysh E.A., Cherneva N.V. Detection of the whistlers in the VLF-spectrograms // E3S Web of Conferences. – 2016. – Vol. 11. – 00011.
- 159 Чернева Н.В., Мочалов В.А., Водинчар Г.М., Дружин Г.И., Санников Д.В., Фирстов П.П., Шевцов Б.М., Малыш Е.А., Мочалова А.В., Лихтенбергер Я. Обнаружение и распознавание радиоимпульсов грозových разрядов // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59. – №12-3. – С. 71-74.
- 160 Малыш Е.А., Водинчар Г.М., Чернева Н.В. Распознавание свистящих атмосфериков в ОНЧ-спектрограммах // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2016. – №4(15). – С. 43-48.